

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Paul DELPUECH

Ingénieur à la Région Nord de la Société Nationale des Chemins de Fer français

1^{RE} THÈSE

Flexion dynamique et oscillations des ponts

2^E THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 11 janvier 1950 devant la Commission d'examen

MM. FOCH, *Président*

ROCARD }
THIRY } *Examineurs*

PARIS

IMPRIMERIE NATIONALE

1950

FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSES

présentées

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Nom du Candidat : **DELPUECH.**

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

Prénoms : **Paul Antoine Jean.**

PAR

Paul DELPUECH

Date de la soutenance : **11 janvier 1950.** *Nationale des Chemins de Fer français*

Numéro d'ordre : N° 283.

1^{re} THÈSE

Flexion dynamique et oscillations des ponts

DELPUECH (Paul). — Flexion
dynamique et oscillations des ponts.
— Paris, Imprimerie Nationale,
1951, in-4°, 85 p., 31 fig.

Th. Ing. Doc. Paris, 1950. N° 283.

DELPUECH (Paul). — Flexion
dynamique et oscillations des ponts.
— Paris, Imprimerie Nationale,
1951, in-4°, 85 p., 31 fig.

Th. Ing. Doc. Paris, 1950. N° 283.

DELPUECH (Paul). — Flexion
dynamique et oscillations des ponts.
— Paris, Imprimerie Nationale,
1951, in-4°, 85 p., 31 fig.

Th. Ing. Doc. Paris, 1950. N° 283.

DELPUECH (Paul). — Flexion
dynamique et oscillations des ponts.
— Paris, Imprimerie Nationale,
1951, in-4°, 85 p., 31 fig.

Th. Ing. Doc. Paris, 1950. N° 283.

J. P. 100117.

IMPRIMERIE NATIONALE

1950

J. P. 100117.

FACULTÉ DES SCIENCES

Nom du Candidat : DELPUCH.

Prénoms : Paul Antoine Jean.

Date de la soutenance : 11 janvier 1950

Numéro d'ordre : N° 283.

DELPUCH (Paul) — Flexion
dynamique et oscillations des ponts.
— Paris, Imprimerie Nationale,
1951, in-4, 85 p., 31 fig.
Tr. Ing. Doc. Paris, 1950, N° 283.

DELPUCH (Paul) — Flexion
dynamique et oscillations des ponts.
— Paris, Imprimerie Nationale,
1951, in-4, 85 p., 31 fig.
Tr. Ing. Doc. Paris, 1950, N° 283.

DELPUCH (Paul) — Flexion
dynamique et oscillations des ponts.
— Paris, Imprimerie Nationale,
1951, in-4, 85 p., 31 fig.
Tr. Ing. Doc. Paris, 1950, N° 283.

DELPUCH (Paul) — Flexion
dynamique et oscillations des ponts.
— Paris, Imprimerie Nationale,
1951, in-4, 85 p., 31 fig.
Tr. Ing. Doc. Paris, 1950, N° 283.

J. P. 100117.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Paul DELPUECH

Ingénieur à la Région Nord de la Société Nationale des Chemins de Fer français

1^{RE} THÈSE

Flexion dynamique et oscillations des ponts

2^E THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 11 janvier 1950 devant la Commission d'examen

MM. FOCH, *Président*

ROCARD }
THIRY } *Examineurs*

PARIS

IMPRIMERIE NATIONALE

1950

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... M. A. CHATELET.

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	H. CARTAN.....	T	Mathématiques générales.
A. DENJOY.....	T	Théorie des Fonctions.	SCHAEFFER.....	T	Physiologie des fonctions.
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	LAFFITTE.....	T	Chimie (P. C. B.).
E. DARMOIS.....	T	Enseignement de Physique.	FAVARD.....		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
Robert LÉVY...	T	Physiologie comparée.	COULOMB.....	T	Physique du globe.
Henri VILLAT..	T	Mécanique des fluides et applications.	M ^{lle} COUSIN...	T	Biologie animale (P. C. B.).
Ch. JACOB.....	T	Géologie.	CHRÉTIEN.....		Chimie (P. C. B.).
P. PASCAL.....	T	Chimie générale.	P. DRACH.....		Zoologie.
M ^{me} RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.	KASTLER.....		Physique.
FOCH.....	T	Mécanique physique et expérimentale.	CHATELET.....	T	Arithmétique et Théorie des nombres.
PAUTHENIER....	T	Électrotechnique générale.	EPHRUSSI.....	T	Génétique.
DE BROGLIE....	T	Théories physiques.	WURMSER.....	T	Biologie physico-chimique.
JOB.....	T	Chimie générale.	BAUER.....	T	Chimie-Physique.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.	RIVIÈRE.....		Géologie (P. C. B.).
COMBES.....	T	Physiologie végétale.	GAUTHERET....		Biologie végétale (P. C. B.).
GARNIER.....	T	Géométrie supérieure.	LUCAS.....		Physique.
PÉRÈS.....	T	Mécanique rationnelle.	A. THOMAS....		Évolution des êtres organisés.
HACKSPILL.....	T	Chimie minérale.	ARNULF.....		Optique appliquée.
LAUGIER.....	T	Physiologie générale.	MAX MORAND..		Physique.
TOUSSAINT.....	T	Technique aéronautique.	SOLEILLET....		Physique.
M. CURIE.....	T	Physique (P. C. B.).	FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.
G. RIBAUD.....	T	Hautes températures.	DANJON.....	T	Astronomie.
CHAZY.....	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	FROMAGEOT....		Chimie biologique.
CROZE.....	T	Physique théorique et Physique céleste.	LAPORTE.....		Physique générale et Radioactivité.
DUPONT.....	T	Théories chimiques.	JANET.....		Mathématiques générales.
VALIRON.....	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	PETIT.....	T	Biologie maritime.
BARRABÉ.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	QUENEY.....	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
VAVON.....	T	Analyse et Mesures chimiques.	GALLIEN.....		Biologie animale (P. C. B.).
G. DARMOIS.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	EICHHORN.....		Biologie végétale (P. C. B.).
Jacques BOURCART.		Géographie physique et Géologie dynamique.	DE CUGNAC....		Biologie végétale (P. C. B.).
AUBEL.....	T	Chimie biologique.	LAVAL.....		Physique (P. C. B.).
M ^{me} JOLIOT-CURIE.	T	Physique générale et Radioactivité.	M ^{lle} CAUCHOIS..		Chimie-Physique.
PLANTEFOL.....	T	Botanique.	THELLIER.....		Physique du globe.
CABANNES.....	T	Recherches physiques.	AUDUBERT....		Electrochimie.
GRASSÉ.....	T	Évolution des êtres organisés.	L'HÉRITIER....		Génétique.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.	GRIVET.....	T	Radio-Électricité.
BOULIGAND.....	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	PONCIN.....		Mécanique des fluides.
CHAUDRON.....	T	Chimie appliquée.	THIRY.....	T	Mécanique appliquée.
WYART.....	T	Minéralogie.	DUBREIL.....		Mathématiques générales.
TEISSIER.....	T	Zoologie.	QUELET.....		Chimie (P. C. B.).
MANGENOT.....	T	Biologie végétale.	CAGNIARD.....		Géophysique appliquée.
P. AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	CHAMPETIER...		Chimie appliquée.
MONNIER.....		Physiologie générale.	CUVILLIER....		Géologie structurale et Géologie appliquée.
PIVETEAU.....	T	Géologie.	JUNG.....		Pétrographie.
ROCARD.....	T	Physique.	TRILLAT.....		Physique (P. C. B.).
			WIEMANN.....		Chimie (P. C. B.).
			LICHNEROWICZ..		Mathématiques.
			JACQUINOT....		Physique (P. C. B.).
			VASSY.....		Physique de l'atmosphère.
			DESTOUCHES...		Théories physiques.

Secrétaire..... CH. MONIER.



A Monsieur CAMBOURNAC

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées,
Professeur honoraire de l'École Nationale des Ponts et Chaussées,
Directeur honoraire de la Société Nationale des Chemins de Fer français

*dont les recherches expérimentales sont à l'origine de ces travaux
pour lesquels il nous a prodigué toute sa haute
et généreuse sollicitude*

À Monsieur GRELOT

Inspecteur Général des Ponts et Chaussées,
Directeur de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

*dont le cours magistral, si documenté, a été un appui fondamental
pour nos recherches*

A Monsieur MESTAIS

Ingénieur Général de la Préfecture de la Seine

*qui, par son expérience, sa précieuse amitié et l'originalité de ses vues,
nous a constamment soutenu dans nos efforts*

et à Messieurs...

À Messieurs

BÉGHIN

Membre de l'Institut,
Professeur honoraire de l'Ecole Polytechnique
et de la Faculté des Sciences de Paris

FOCH

Professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris

ROCARD

Professeur à l'École Normale Supérieure et à la Faculté des Sciences de Paris

THIRY

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

CROZE

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

*dont le haut enseignement, les ouvrages remarquables et les savantes
directives nous ont si heureusement guidé dans le développement et la
mise au point de nos travaux.*

En témoignage de notre vive admiration et de notre profonde gratitude

À mes Parents,

À mes Amis,

Messieurs

Astorg DELPUECH

Pierre BENOIST

Fernand GIGUELLE

Jean MESTAIS

Ingénieur E. C. P.

*avec mes plus affectueuses pensées, en reconnaissance du chaleureux
climat familial dont ils m'ont toujours entouré*

FLEXION DYNAMIQUE ET OSCILLATIONS DES PONTS

par M. DELPUECH,

Ingénieur à la Région Nord de la S. N. C. F.

INTRODUCTION.

Les ponts supportent, comme on sait, non seulement leur poids propre et certaines charges permanentes, mais aussi des charges mobiles dont le poids s'accroît des forces d'inertie résultant des accélérations verticales subies par ces charges à la traversée de l'ouvrage.

Ces accélérations proviennent, d'une part, de la courbure de flexion des poutres et, d'autre part, du déphasage périodique entre la réaction élastique de celles-ci et les forces agissantes.

L'effet de courbure constitue ce qu'on a appelé l'effet centrifuge et ce que nous nommons ici *flexion dynamique*. Le déphasage périodique est la cause même des *oscillations* qu'on observe dans tous les ouvrages.

Pour tenir compte de l'ensemble des forces d'inertie engendrées au passage des charges roulantes, on affecte le poids de ces dernières d'un *coefficient dynamique* que les règlements sur la construction des ponts déterminent au moyen d'une formule empirique.

En France, le règlement du 10 mai 1927 impose une formule fonction seulement de la portée des poutres et du rapport de la charge mobile à la charge fixe. La vitesse de passage n'y figure pas, mais la formule sous-entend une application instantanée de la charge mobile et donne au coefficient la valeur maximum 2 si la longueur des poutres et la charge permanente tendent chacune vers zéro.

Cette formule est inspirée des travaux de Barré de Saint-Venant sur la flexion par choc des barres élastiques de masse non négligeable. Cependant, ne contenant pas explicitement la vitesse, elle ne se prête pas à la détermination des vitesses admissibles sur les ouvrages anciens

ou avariés, ni à l'appropriation des ouvrages nouveaux aux vitesses plus grandes que les chemins de fer envisagent maintenant de pratiquer. Il est donc nécessaire de la refondre en s'appuyant sur les phénomènes fondamentaux ci-dessus.

Les phénomènes dynamiques ont cependant donné lieu à des recherches théoriques et expérimentales remarquables (1), mais la technique n'en a pas tiré parti.

Dès le début des chemins de fer, en 1847, STOKES, Professeur à l'Université de Cambridge, avait été chargé de résoudre le problème de la majoration dynamique à appliquer à une charge concentrée franchissant à vitesse constante une poutre qui fléchit à son passage. L'équation différentielle à laquelle conduit ce problème présente de grandes difficultés d'intégration et STOKES n'en a donné la solution que par l'emploi des séries. Encore ne s'agit-il là que de l'effet centrifuge. En retraçant ici cette solution, nous la compléterons par celle de l'effet oscillatoire dont nous avons pu intégrer l'équation correspondante.

En 1861, RENAUDOT (2), considérant le cas des grands ouvrages, traite le problème d'une charge répartie partielle progressant sur une longue poutre qu'elle couvre finalement en totalité. C'est la traduction évidente de l'effet d'un train homogène franchissant un grand pont. RENAUDOT a donné la solution de ce problème, qui ne concerne également que l'effet centrifuge, sous la forme de séries et en a déduit un coefficient dynamique analogue à celui de STOKES.

Enfin, BRESSE (3) reprenant en 1880 le problème de RENAUDOT pour le cas particulier où la charge uniforme mobile couvre entièrement le pont, tire des conséquences intéressantes de ce cas particulier en le rapprochant d'un effet de flambage.

Ces études ont fait ressortir l'existence de vitesses critiques pour lesquelles la poutre doit se rompre par exagération de sa courbure, celle-ci provoquant elle-même l'effet centrifuge qui l'accroît.

Mais RENAUDOT avait déjà montré combien cet effet centrifuge est faible aux vitesses pratiquées sur route ou sur rail. On doit noter, d'ailleurs, qu'en donnant à la poutre une contre-courbure initiale on peut réduire beaucoup et même annuler l'effet centrifuge.

(1) GRELOT. — École Nationale des Ponts et Chaussées. Cours de ponts métalliques, p. 184 à 207.

(2) RENAUDOT. — *Annales des Ponts et Chaussées*, 1861-1, p. 145.

(3) BRESSE. — Cours de mécanique appliquée de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1880, p. 143.

L'étude des phénomènes oscillatoires n'a été abordée que plus tard et c'est RÉSAL, semble-t-il, qui s'y est intéressé le premier (4). Une partie importante de son cours de l'École des Ponts et Chaussées, professé de 1893 à 1912, est consacrée à l'étude des phénomènes oscillatoires. Il y étudie, notamment, l'effet d'une charge fixe appliquée sur une poutre pendant une durée inférieure à la période d'oscillation de celle-ci et trouve que la poutre fléchit d'autant moins que la durée d'application de la charge est plus courte. Il en conclut qu'aux grandes vitesses la charge pourrait franchir la brèche en utilisant à peine la réaction de la poutre.

En fait, ceci exige une vitesse supérieure à la vitesse critique dont nous avons parlé, en sorte qu'on aurait déjà couru de grands dangers pour l'atteindre. Nous verrons ici comment le point de vue de RÉSAL se trouve confirmé et renforcé pour les grandes vitesses, par l'allongement de la période de l'oscillation sous les charges mobiles. Ce curieux effet entraîne l'arrêt complet de la flexion à une certaine vitesse que nous appellerons *vitesse critique d'oscillation*.

Avant que soit résolu le problème de l'oscillation simple, le Congrès international des Chemins de fer tenu à Amsterdam en 1925 proposa l'étude des effets de la résonance entre les oscillations propres des ponts et la cadence des impulsions des pièces à mouvement périodique des locomotives.

En 1929, des essais furent entrepris aux Indes et en Angleterre pour mesurer ces effets. Mais ceux-ci se montrèrent peu importants du fait que le déplacement de la charge sur le pont modifie sans cesse la période d'oscillation propre du système et s'oppose ainsi à l'accumulation des effets du synchronisme. De tels effets seraient cependant à craindre, par exemple, au passage d'une longue suite d'essieux équidistants heurtant un joint de rails sur un pont. Toutefois, ce cas théorique est rarement réalisé d'une façon parfaite (condition essentielle) et il n'a lieu, en tout cas, que sous des charges remorquées ordinairement légères.

Par ailleurs, les expériences anglaises de 1929 ont montré que des machines électriques non munies de pièces à mouvement alternatif imprimaient également aux ouvrages des mouvements oscillatoires et que certaines machines à vapeur à bielles mal équilibrées n'en donnaient parfois guère plus.

(4) RÉSAL. — Cours de ponts métalliques de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, tome II, 2^e fascicule.

Les études de MM. INGLIS et TIMOSHENKO (1), qui avaient inspiré ces essais, n'ont pas trouvé là une confirmation très nette. Celle de M. TIMOSHENKO se réfère bien au problème de STOKES, mais en ramenant celui-ci au cas d'une charge fixe variant périodiquement dans le temps. L'équation posée ne devient intégrable que si l'on néglige la variation de masse qui accompagne nécessairement celle du poids. Certes, c'est là un artifice acceptable quand on a en vue une solution de fortune, mais il laisse échapper des phénomènes intéressants d'amortissement et d'auto-oscillation qui expliquent certaines particularités des diagrammes relevés dans les essais de ponts.

En vue du Congrès de 1930, l'Association Internationale des Chemins de fer organisa de nouvelles expériences qui, confiées à la France, furent exécutées à Douai sous la direction de M. CAMBOURNAC, alors Ingénieur en Chef à la Compagnie du Nord.

Dans ces expériences, qui portèrent également sur un ouvrage à treillis de type classique franchi par des machines lourdes, on utilisa notamment un véhicule spécial, de construction suisse, comportant un essieu central de 30 tonnes entre deux essieux d'équilibrage à peine chargés. Ce véhicule, non muni de ressorts, était lancé sur une voie franchissant un pont spécial, très simple, à deux poutres sous rails de 10 mètres de portée, muni de fleximètres et tensomètres enregistreurs.

Or, ce véhicule sans mécanisme pulsatoire donna les plus grandes oscillations qui aient jamais été obtenues sous voie ferrée. L'amplitude atteignit en effet 50 p. 100 de la flèche statique à la vitesse de 50 kilomètres à l'heure et, fait remarquable, se montra simplement proportionnelle à la vitesse.

Les théories proposées ne rendant compte ni de l'amplitude observée, ni de sa forme linéaire en v , nous essayâmes de rendre compte de ces faits en supposant que la poutre, attaquée en position de repos, se chargeait par fractions successives proportionnelles à sa période d'oscillation en charge, et à la pente moyenne $\frac{2f}{l}$ de la première moitié de la trajectoire. Cette hypothèse nous conduisit à l'expression suivante de l'amplitude :

$$\frac{4\pi f v}{l} \sqrt{\frac{f}{g}}$$

où f est la flèche au repos, v la vitesse de passage, l la portée de la poutre.

(1) *Bulletin du Congrès des Chemins de Fer*. Novembre 1929, p. 2551.

Cette formule coïncidait remarquablement avec l'expérience, mais des essais sur modèle réduit, faits ultérieurement à la demande de M. CAMBOURNAC, ne la confirmèrent pas.

Nous verrons, cependant, comment l'analyse redonne bien l'expression linéaire ci-dessus et explique l'insuccès des essais sur modèle réduit par le caractère fortuit du facteur numérique lié aux conditions dans lesquelles la poutre est attaquée par la charge.

L'effet dynamique ci-dessus, qui correspond à la rapidité de mise en charge, s'est montré dominant aux essais de Douai. Il convient donc de l'ajouter à l'effet centrifuge corrigé, s'il y a lieu, de celui de la contrecourbure. L'ensemble constituera le coefficient dynamique complet que nous proposerons pour le calcul des ponts.

Quant à l'effet de résonance, nous l'examinerons *in-fine* du mémoire avec celui de l'amortissement, qui le combat efficacement, et nous verrons à ce propos comment ce dernier explique le curieux comportement des ponts en béton armé à l'égard des phénomènes d'oscillation.

NATURE DES PROBLÈMES.

Un pont est constitué en principe par un ensemble de poutres longitudinales disposées sous la voie qui franchit la brèche. Bien souvent, cependant, pour augmenter la hauteur libre sous poutres, on fait reposer la voie sur un tablier de poutrelles transversales (entretoises) qui reportent la charge sur deux grandes poutres latérales dites principales. Entre les entretoises des ponts rails sont encore disposés des longerons, petites poutres recevant directement les traverses ou les longrines de la voie.

Lorsqu'une charge mobile franchit l'ouvrage, elle agit successivement en des points différents des poutres longitudinales dont la réaction varie, par suite, avec la position x de cette charge. Sur les poutres transversales, la charge appliquée occupe une position fixe, mais elle est variable dans le temps. Si le mouvement de la charge est connu, il établit une relation entre x et t et on peut décrire le mouvement soit dans l'espace, soit dans le temps.

Nous supposons les poutres horizontales et le mouvement de la charge uniforme, de vitesse v .

On aura donc :

$$x = vt$$

Lorsqu'une charge mobile parcourt, suivant sa longueur, une poutre

horizontale, elle produit en chaque point de celle-ci une déformation verticale qui varie avec le temps d'une façon non linéaire. Il en résulte des réactions d'inertie verticale de tous les points pesants de la poutre et de la charge mobile elle-même dont l'ordonnée de la trajectoire $y(x)$ s'identifie à tout instant avec la déformation de la poutre au point où elle se trouve.

On peut alors se proposer de déterminer soit ladite trajectoire, soit la variation dans le temps de la déformation en un point donné de la poutre, par exemple sa flèche au milieu $f(t)$.

Dans les deux cas, le problème se ramène à résoudre un cas particulier de l'équation différentielle de mécanique élastique :

$$(1) \quad M \frac{d^2 y}{dt^2} + G \frac{dy}{dt} + Fy = P$$

où M , G , F , P , peuvent être des fonctions de x , donc de t en vertu de la loi de mouvement ci-dessus. Nous comptons les y positivement vers le bas, selon l'usage dans le calcul des ponts.

Le terme du second ordre exprime la réaction d'inertie, le terme linéaire une résistance éventuelle amortissant le mouvement, ou bien encore une effet de variation de la masse portée qui peut alors changer de signe et donner lieu à l'auto-oscillation.

Le terme en y exprime la réaction élastique de la poutre au point x sous le poids P et l'ensemble des réactions que nous venons d'indiquer. On sait que les solutions de l'équation (1) comportent, outre une fonction algébrique proportionnelle au poids P , une forme transcendante accusant le mouvement oscillatoire. Mais celui-ci conservera toujours un caractère fortuit commandé par les conditions initiales. Seule sa fréquence sera imposée par l'équation d'équilibre (1); son amplitude qui, pourtant, est l'objet même des préoccupations de l'Ingénieur, sera obtenue dans chaque cas pour des conditions données de l'attaque de la poutre par la charge mobile.

I. POUTRES COURTES.

I.1. Problème de Stokes.

Considérons (fig. 1), une poutre horizontale bien rectiligne, de longueur l , simplement posée sur deux appuis et franchie, à vitesse v , par une charge roulante unique de poids P , assez grand pour qu'on puisse négliger devant lui le poids propre de la poutre.

Lorsque la vitesse est assez faible pour que les forces d'inertie soient insensibles, la suite continue des déformations Y de la poutre au droit de la charge, et par conséquent la trajectoire de celle-ci, forme la courbe symétrique :

$$(1) \quad Y = \frac{Px^2(l-x)^2}{3EI l}.$$

On en déduit la réaction de la poutre au point x par unité de déformation :

$$(1 \text{ bis}) \quad k = \frac{P}{Y} = \frac{3EI l}{x^2(l-x)^2}.$$

Si la vitesse est importante, la trajectoire de la charge prend une

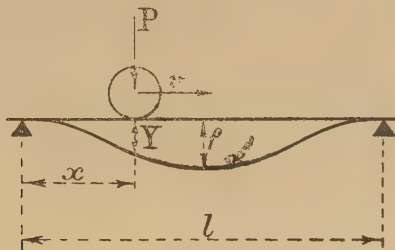


Fig. 1.

nouvelle forme $y(x)$, la poutre exerçant à chaque instant sous la charge la réaction élastique $-ky$. L'équation d'équilibre dynamique s'écrit alors :

$$(2) \quad M \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = P \quad \text{avec } P = Mg.$$

Du fait de la loi du mouvement, $x = vt$, cette équation devient

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + Fy = \frac{g}{v^2}$$

avec :

$$(4) \quad F = \frac{3EI l}{Mv^2 x^2(l-x)^2}.$$

La résolution de l'équation (3) avec son second membre fournira

l'effet centrifuge; celle de l'équation sans second membre donnera le mouvement oscillatoire propre du système.

I.2. Effet centrifuge.

a. Solution approchée.

Avant de résoudre l'équation différentielle (3), remarquons qu'une solution approchée, suffisante pour la pratique, peut s'obtenir de la manière suivante :

Soit y'' la dérivée seconde de la trajectoire inconnue de la charge P. La réaction d'inertie de cette dernière sera :

$$(5) \quad R = -Mv^2 y''.$$

Cette force s'ajoutera au poids P de sorte que la poutre subira l'action de la résultante (P + R).

Or, la trajectoire y et toutes ses dérivées sont, à l'instant considéré, proportionnelles à cette résultante. On aura donc, en particulier :

$$(6) \quad y'' = (P + R) z(x)$$

z étant une fonction inconnue de x .

D'après cela, la relation (5) s'écrira :

$$R = -(P + R) Mv^2 z(x)$$

d'où la valeur de la force d'inertie :

$$(7) \quad R = \frac{-PMv^2 z(x)}{1 + Mv^2 z(x)}.$$

Ainsi, lorsque $z(x)$ est positif, la force R est inférieure au poids et lui est opposée. Mais, quand $z(x)$ devient négatif, soit alors $z(x) = -z_1$, la force d'inertie (7) s'écrit :

$$(8) \quad R = \frac{PMv^2 z_1}{1 - Mv^2 z_1}.$$

Elle s'ajoute au poids et peut prendre des valeurs considérables puisqu'elle devient infinie pour :

$$(9) \quad v_c = \sqrt{\frac{1}{Mz_1}}.$$

qui est alors une *vitesse critique*.

Pour appliquer ces résultats, jusqu'ici exacts, il nous faut connaître la fonction $z(x)$ qui, d'après (6), n'est autre que la courbure de la trajectoire réelle pour la force unité. On aura une approximation suffisante en prenant la dérivée seconde de la fonction (1) pour $P = 1$, ce qui donne :

$$z = \frac{2}{3EI} (l^2 - 6lx + 6x^2).$$

Cette fonction dérivée est positive (donc z négatif) aux abouts de la poutre où, par suite, la charge appuie moins sur celle-ci. Elle est négative (donc z positif) dans la partie centrale, où, par suite, l'inertie surcharge la poutre. La réaction d'inertie est maximum au milieu

$$\left(x = \frac{l}{2}\right)$$

où elle vaut, du fait que

$$z = \frac{-l}{3EI},$$

$$(10) \quad R = \frac{PMv^2}{\frac{3EI}{l} - Mv^2}.$$

La vitesse critique, qui rend R infinie, est évidemment alors :

$$(11) \quad v_c = \sqrt{\frac{3EI}{Ml}}.$$

En prenant cette vitesse pour base, on peut écrire (10) sous la forme simple :

$$(12) \quad R = \frac{Pv^2}{v_c^2 - v^2} = \frac{P\beta^2}{1 - \beta^2}.$$

en posant :

$$\beta = \frac{v}{v_c}.$$

Il suffit donc de connaître la vitesse critique. Si l'on remarque que le taux de travail N de la poutre est donné, on aura, en désignant par h la hauteur de celle-ci,

$$2N \frac{l}{h} = \frac{Pl}{4}$$

(section symétrique)

On en déduit :

$$I = \frac{Plh}{8N}$$

et par suite :

$$v_c^2 = \frac{3EI}{8Nl} = \frac{3Egh}{8N}.$$

Cette vitesse critique est donc la même que celle d'un corps qui tomberait d'une hauteur égale à $\frac{3}{16} \cdot \frac{E}{N}$ fois la hauteur h de la poutre.

Pour l'acier, où l'on a $E = 22.000$ et $N = 11 \text{ kg/mm}^2$, cette vitesse est :

$$v_c = \sqrt{750gh}$$

bien accessible pour $h < 0 \text{ m. } 20$.

Ainsi, la force d'inertie centrifuge vaudrait :

$$(13) \quad R = \frac{Pv^2}{750gh - v^2}$$

ou, pour v assez petit devant v_c :

$$R = \frac{Pv^2}{7500h}.$$

La majoration dynamique due à l'effet centrifuge serait donc, pour la pratique et dans le cas considéré :

$$(14) \quad \gamma = \frac{v^2}{7500h}.$$

On voit qu'elle ne dépend que de la hauteur des poutres et reste indépendante de leur portée.

Mais passons maintenant à la résolution correcte de l'équation (3).

b. *Solution de STOKES.*

Elle s'établit comme suit :

Posons :

$$(15) \quad S = \frac{Mx^2(l-x)^2}{3EI}.$$

L'équation (3) s'écrit :

$$(16) \quad v^2 \gamma'' + \frac{1}{s} \gamma = \zeta.$$

On en déduit :

$$(17) \quad \gamma = gS - v^2 S \gamma'',$$

le produit gS n'étant autre que l'ordonnée $Y(1)$ de la trajectoire obtenue à très petite vitesse.

Dérivons deux fois l'équation (17); il vient :

$$y'' = gS'' - v^2(S''y'' + 2S'y''' + Sy'')$$

reportant ceci dans (17), on trouve la nouvelle expression :

$$y = gS - v^2S[gS'' - v^2(S''y'' + 2S'y''' + Sy'')]$$

ou :

$$(18) \quad y = gS - v^2gSS'' + v^4SR_2$$

R_2 étant un reste qui contient les dérivées seconde, troisième et quatrième de y .

En dérivant deux fois l'expression (18) et opérant chaque fois de même, on arrive sans peine à l'expression générale :

$$(19) \quad y = gS[1 - v^2A_1 + v^4A_2 - v^6A_3 + \dots \pm v^{2n}R_n]$$

R_n étant un reste qui contient toutes les dérivées de y jusqu'à l'ordre $2n$ et les coefficients A ayant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A_1 &= S'' \\ A_2 &= S''A_1 + 2S'A_1' + SA_1'' \\ A_3 &= S''A_2 + 2S'A_2' + SA_2'' \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

dont la loi de formation est évidente.

En posant :

$$\frac{M}{3EI} = r$$

on a successivement :

$$\begin{aligned} S &= rx^2(l-x)^2 \\ S' &= 2rx(l^2 - 3lx + 2x^2) \\ S'' &= 2r(l^2 - 6lx + 6x^2) \\ S''' &= 12r(2x - l) \\ S'''' &= 24r \end{aligned}$$

Par suite, et en définissant la position de la charge par $\theta = \frac{x}{l}$ on établit que :

$$\begin{aligned} A_1 &= S'' = 2rl^2(1 - 6\theta + 6\theta^2) \\ A_2 &= 4r^2l^4(1 - 24\theta + 114\theta^2 - 180\theta^3 + 90\theta^4) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

On constate alors que, suivant la valeur de θ , les coefficients A sont, tantôt de même signe, tantôt de signes alternés, et il en est donc de même des termes de la série (19) qui, toutefois, sont alors alternés quand les A sont de même signe.

D'autre part, la quantité :

$$rl^2 = \frac{Ml}{3EI} = \frac{1}{v_c^2}$$

n'est autre que l'inverse carré de la vitesse critique (11) que nous avons trouvée tout à l'heure.

Posant encore :

$$\beta = \frac{v}{v_c},$$

l'expression (19), compte tenu des valeurs ci-dessus des coefficients A, deviendra :

$$y = gS [1 - 2\beta^2(1 - 6\theta + 6\theta^2) + 4\beta^4(1 - 24\theta + \dots) \dots \pm 2n\beta^{2n}R_n],$$

et en particulier, pour $\theta = \frac{1}{2}$ (milieu de la poutre),

$$(20) \quad y = 9S \left[1 + \beta^2 + \frac{5}{2}\beta^4 + \dots \right]$$

ce qui est bien le résultat obtenu par STOKES.

Comme la déformation statique est $y_1 = gS$, on voit que la majoration dynamique est :

$$(21) \quad \frac{y - y_1}{y_1} = \beta^2 + \frac{5}{2}\beta^4 + \dots$$

Comparons ce résultat à l'expression (12) de la réaction centrifuge R sous le poids mobile P, il vient :

$$(22) \quad \frac{R}{P} = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \beta^2 + \beta^4 + \beta^6 + \dots$$

On voit que les deux méthodes sont équivalentes pour les vitesses inférieures au quart de la vitesse critique et que la série (21) de STOKES, qui est exacte, croît plus vite que la série (22) de la méthode approchée.

Nous avons vu que pour une poutre en acier de hauteur h travaillant au taux habituel de 11 kg par mm², la vitesse critique est

$$v_c = \sqrt{750gh}.$$

On a donc :

$$(23) \quad \beta^2 = \frac{v^2}{750gh}.$$

C'est le terme qui caractérisera l'effet centrifuge dans notre coefficient dynamique.

I,3. Oscillations.

Reprenons l'équation (3), mais privée de son second membre,

$$(24) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + Fy = 0$$

avec :

$$(24 \text{ bis}) \quad F = \frac{3EI}{Mv^2 x^2 (l-x)^2}.$$

Elle représente un équilibre entre les forces élastiques et d'inertie sans le concours de la pesanteur, c'est-à-dire, si l'on veut, la trajectoire dans le plan horizontal d'un curseur glissant sur la poutre écartée un instant de sa forme rectiligne.

Pour résoudre l'équation (24) cherchons une solution de la forme :

$$(25) \quad y = \varphi(x) \sin \cdot \psi(x)$$

où φ et ψ sont deux fonctions inconnues de (x) . Simplifions l'écriture en posant :

$$y = \varphi \sin \psi.$$

Dérivant deux fois, il vient :

$$(26) \quad y'' = -\left(\psi'^2 - \frac{\varphi''}{\varphi}\right) \varphi \sin \cdot \psi + (2\varphi' \psi' + \varphi \psi'') \cos \cdot \psi.$$

La première condition pour identifier (26) et (24) est de faire disparaître le terme en cosinus, ce qui implique entre les fonctions φ et ψ la relation :

$$2\varphi' \psi' + \varphi \psi'' = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{2\varphi'}{\varphi} + \frac{\psi''}{\psi'} = 0.$$

On en déduit par intégration :

$$2 \log \cdot \varphi + \log \cdot \psi' = C^{\text{te}}$$

ou

$$(27) \quad \varphi^2 \psi' = C^{\text{te}}.$$

Cette condition exprime la conservation du moment cinétique d'un mobile tournant autour d'un centre fixe avec une vitesse angulaire :

$$\omega = \psi'v$$

φ étant la distance du point à ce centre. La projection sur $\overline{oy}$ de la position de ce mobile est à chaque instant la même que celle du mobile P parcourant réellement la poutre. Elle peut donc servir au tracé de la trajectoire de ce dernier.

La condition (27) étant satisfaite, l'équation (26) s'écrit, d'après (25),

$$y'' + \left(\psi'^2 - \frac{\varphi''}{\varphi} \right) y = 0$$

c'est-à-dire, compte tenu de (27) dont c sera la constante :

$$y'' + \left(\frac{c^2}{\varphi^3} - \frac{\varphi''}{\varphi} \right) y = 0.$$

Cette équation s'identifiera avec (24) si l'on a :

$$(28) \quad \frac{c^2}{\varphi^3} - \frac{\varphi''}{\varphi} = F = \frac{3EI l}{Mv^2 x^2 (l-x)^2}.$$

On satisfait immédiatement à cette équation avec la fonction :

$$(29) \quad \varphi = a \sqrt{x(l-x)}.$$

On a, en effet :

$$\varphi^4 = a^4 x^2 (l-x)^2$$

$$\varphi'' = \frac{-l^2 a}{4 \sqrt{x^3 (l-x)^3}}$$

donc :

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \frac{-l^2}{4x^2 (l-x)^2}.$$

Par suite, la relation (28) donne :

$$\frac{c^2}{a^4} + \frac{l^2}{4} = \frac{3EI l}{Mv^2}$$

ou :

$$(30) \quad \frac{c^2}{a^4} = \frac{3EI l}{Mv^2} - \frac{l^2}{4}.$$

Ainsi la fonction (25) qui représente la trajectoire ondulée du mobile sur la poutre oscillante, répondra à l'équation différentielle (24) avec la loi d'amplitude (29) qui représente l'enveloppe des élongations

de la trajectoire. L'élongation maximum a lieu au milieu de la poutre où elle atteint :

$$\varphi_{\max.} = \frac{al}{2}.$$

Il nous reste à établir la fonction de phase ψ . Reprenons pour cela la condition (27). Compte tenu de (29) elle devient :

$$\psi' = \frac{c}{\varphi^2} = \frac{c}{a^2 x(l-x)}.$$

Une quadrature donne alors :

$$\psi = \frac{c}{a^2} \int \frac{dx}{x(l-x)} = \frac{c}{la^2} \log \frac{x}{l-x} + \alpha$$

α étant une constante de phase qu'on prendra ici égale à zéro.

Ainsi l'équation du mouvement propre défini par l'équation (24) est :

$$(31) \quad y = a \sqrt{x(l-x)} \sin \left[\frac{c}{la^2} \log \frac{x}{l-x} \right].$$

C'est une courbe symétrique par rapport au milieu de la poutre (fig. 2). Moyennant une condition que nous allons préciser, c'est une

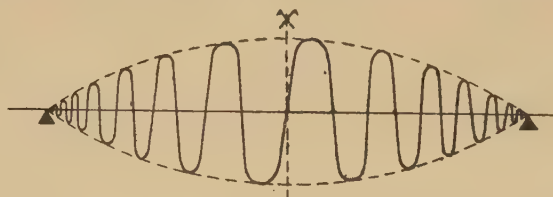


Fig. 2.

sinusoïde de période et d'amplitude variables qui affecte la forme ci-dessus.

Comme le rapport $\frac{c}{a^2}$ est fourni par la relation (30), la fonction de phase est déterminée quand la vitesse de passage est connue. Mais le coefficient d'amplitude α n'est pas pour cela déterminé et il en résulte que l'importance du mouvement oscillatoire dépend d'une circonstance étrangère au phénomène dynamo-élastique que nous venons d'étudier. Ce sera, par exemple, un choc transversal ou l'effet d'une mise en charge rapide que nous étudierons plus loin.

Une conséquence intéressante est le fait qu'au delà d'une certaine

vitesse, l'oscillation ne peut plus avoir lieu. La relation (30) donne en effet pour le facteur $\frac{c}{a^2}$ de la fonction de phase :

$$(32) \quad \frac{c}{a^2} = \sqrt{\frac{3EI}{Mv^2} - \frac{l^2}{4}}$$

et on voit que ce rapport devient imaginaire dès que l'on a

$$(33) \quad v \geq \sqrt{\frac{12EI}{Ml}} = V_c.$$

Cette vitesse est exactement le double de la vitesse critique (11) de l'effet centrifuge que nous avons rencontrée précédemment.

Explicitons la période :

La pulsation dans le temps est

$$\omega = \psi' v.$$

La période est donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi a^2 x (l-x)}{cv}.$$

Mais, d'après (32) et (33),

$$\frac{cv}{a^2} = \frac{1V_c}{2} \sqrt{1 - \beta^2}$$

en posant

$$\beta = \frac{v}{V_c}.$$

Par suite :

$$(34) \quad T = \frac{4x(l-x)}{1V_c \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

En substituant à V_c sa valeur (33) on trouve finalement :

$$(35) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{Y}{g(1 - \beta^2)}}$$

Y étant la déformation statique au droit de la charge. On voit donc que le système oscille comme un pendule simple de longueur Y si la vitesse de passage est assez petite, mais que la période de cette oscillation augmente indéfiniment quand la vitesse tend vers la valeur critique (33). A ce moment, on peut dire que la poutre ne fléchit plus.

Il est intéressant de comparer à la période statique

$$\left(2\pi \sqrt{\frac{Y}{g}} \right)$$

la durée t_c du passage aux vitesses critiques (11) et (33).

Pour la première de ces vitesses on a :

$$t_c^2 = \frac{l^3}{v_c^3} = \frac{Pl^3}{3EIg} = 16 \frac{f}{g}$$

ou :

$$(36) \quad t_c = 4 \sqrt{\frac{f}{g}}$$

f étant la déformation au milieu, ou *flèche*. La période d'oscillation au milieu, et au pas, est, d'après (35),

$$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}$$

Comparant à (36), il vient :

$$\frac{t_c}{T_s} = \frac{2}{\pi}$$

Pour la seconde vitesse critique, (33), qui est deux fois plus grande, ce rapport serait $\frac{1}{\pi}$. C'est dire que les vitesses critiques sont de l'ordre de celles qui font passer la charge dans une durée voisine de la demi-période d'oscillation du système.

a. RÉACTION HORIZONTALE.

Le bilan énergétique nous réserve une curiosité résultant de l'élasticité variable.

L'équation (24), qui exprime l'équilibre des forces, donne par intégration suivant l'axe des y :

$$(37) \quad \int y'' dy + \int F(x) y dy = C^{te}.$$

Le premier terme s'intègre immédiatement et donne :

$$\int y' dy = \frac{1}{2} y'^2.$$

Le second s'intègre par parties et conduit à, puisque F dépend de x ,

$$\int F y dy = \frac{1}{2} F y^2 - \frac{1}{2} \int y^2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dy} dy.$$

L'équation (37) devient donc :

$$\frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{2} F y^2 = \frac{1}{2} \int y^2 \frac{\partial F}{\partial x} dx + C^{te}.$$

Si nous multiplions ceci par Mv^2 , il vient, en vertu de (1 bis) et

(24 bis) qui donnent $F = \frac{k}{Mv^2}$, et en posant $vy' = \frac{dy}{dt} = u$ (vitesse du mouvement vertical),

$$\frac{1}{2} Mu^2 + \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} \int y^2 \frac{\partial k}{\partial x} dx + C^{te}.$$

On voit ainsi apparaître le travail d'une force $\mathcal{F} = \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial k}{\partial x}$ dirigée suivant l'axe des x et contre laquelle il faut agir pour maintenir constante la vitesse de passage v . Autrement, le mobile serait accéléré jusqu'au milieu de la poutre, où cette force change de signe, et retardé ensuite.

b. LE POINT DE VUE DE RÉSAL.

RÉSAL a longuement analysé, dans son cours déjà cité, les effets d'une charge en repos, concentrée ou répartie, appliquée pendant un temps variable, très long ou très court devant la période T d'oscillation du système. Il en a dégagé la loi du mouvement vertical consécutif à cette mise en charge temporaire et a montré que la déformation, qui peut atteindre au maximum le double de la flèche statique, se réduit à une valeur bien inférieure à celle-ci pour une durée d'application très courte.

Le phénomène se résume ainsi :

Soient f la flèche statique d'une poutre sous une charge donnée et T sa période d'oscillation en charge. On trouve facilement, en partant de l'équation (2) prise avec k constant, que si la poutre est chargée instantanément sans vitesse ni déformation initiales, sa déformation au temps t sera

$$y = f \left(1 - \cos \cdot \frac{2\pi t}{T} \right)$$

expression qui fait varier y entre zéro et $2f$.

Mais si l'on considère une durée d'application t très petite devant T , on est fondé à écrire, en développant,

$$y = \frac{2\pi t^2}{T^2} f \left(1 - \frac{\pi^2 t^2}{3T^2} + \dots \right).$$

Comme, pour une charge à poste fixe, la période est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}},$$

il en résulte que :

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \left(1 - \frac{\pi^2 t^2}{3T^2} + \dots \right),$$

de sorte que, dans les premiers instants, la charge tombe d'abord en chute libre pour se redresser ensuite ou bien disparaître suivant les conditions posées.

Mais si t est inférieur au quart de la période T , on est assuré que y sera plus petit que f et c'est ce qui fait dire à RÉSAL que les charges rapides, d'action nécessairement éphémère sur les poutres courtes, ne peuvent imposer à celles-ci une flexion notable.

Ce point de vue est ici renforcé par le fait que la période d'oscillation sous les charges mobiles est, d'après (35), allongée par la vitesse de passage. En remplaçant dans les équations ci-dessus la période T par son expression (35), on trouve en effet pour la déformation en fonction du temps :

$$y = \frac{1}{2} g t^2 (1 - \beta^2) \left(1 - \frac{\pi^2 t^2}{3 T^2} + \dots \right)$$

et on voit ainsi que non seulement la charge ne tombe plus en chute libre dans les premiers instants, mais encore qu'elle ne tombe plus du tout quand sa vitesse atteint la valeur critique (33). La poutre, dès lors, ne fléchit plus.

C'est bien le phénomène auquel on pouvait s'attendre, mais on peut se demander maintenant dans quelle mesure l'allongement de la période s'oppose à l'établissement des déformations dangereuses.

Supposons, pour simplifier, que la période ne varie pas au cours du passage et cherchons la vitesse v_1 qui conduit le mobile au milieu de la portée en un temps égal à la demi-période (ce qui donne une oscillation complète au passage et une flèche double au milieu). Le temps nécessaire sera

$$t_1 = \frac{l}{2 v_1} = \frac{T}{2}$$

ou, d'après (35) et en posant

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c},$$

$$\frac{l}{2 \beta_1 v_1} = \pi \sqrt{\frac{f}{g (1 - \beta_1^2)}}.$$

On en tire

$$\beta_1^2 = \frac{1}{1 + \frac{4 \pi^2 v_1^2}{g l^2}}.$$

Or, ici,

$$f = \frac{M g l^3}{48 E I}$$

et

$$v_c^2 = \frac{12EI}{Ml},$$

selon (33).

Donc

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}} = 0,303$$

ou

$$v_1 = 0,303 v_c.$$

Cette vitesse permet donc encore d'obtenir une flèche double au milieu de la portée.

Une vitesse telle que

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}} = 0,538$$

ne permettrait plus de dépasser la flèche statique f au milieu et une vitesse plus grande fournirait des déformations moindres.

Mais une majoration dynamique plus élevée se fera alors sentir dans la seconde moitié de la poutre où la raideur augmente. Le danger se reporte vers l'appui de sortie qui est énergiquement battu par la charge quittant la poutre.

Enfin, tout ceci suppose évidemment qu'on reste dans le domaine élastique. L'oscillation cesse dès qu'on sort de ce domaine.

I,4. Charges multiples. — Couplage.

Revenons maintenant aux faibles vitesses pour étudier spécialement l'effet de la pluralité des charges.

Lorsqu'une poutre porte, en différents points $x_1, x_2, \dots$ de sa longueur, des charges concentrées $P_1, P_2, \dots$ tout mouvement oscillatoire de l'une de ces charges se communique aux autres et le mouvement résultant est une oscillation synchrone de tous les éléments du système.

Cette oscillation résultante devant satisfaire à l'équation d'équilibre de chacune des charges ne peut avoir que certaines fréquences $\nu_1, \nu_2, \dots$ qui diffèrent des fréquences propres $\omega_1, \omega_2, \dots$ des charges prises isolément mais en sont des fonctions déterminées. C'est le phénomène de « couplage ».

Les problèmes de cette nature ont été largement étudiés par M. Yves

Rocard (1) dans le domaine électromagnétique. M. Adrien Foch (2) a traité de ce phénomène dans le domaine acoustique et M. Béghin (1) dans celui du gyroscope.

Dans le cas général envisagé ci-dessus, M. Yves Rocard conseille l'emploi de la méthode de Lagrange. C'est, en effet, la seule pouvant conduire à des calculs praticables dès que le nombre des charges surpasse deux ou trois. Mais comme nous nous proposons seulement de montrer la nature du phénomène, nous nous limiterons au cas simple de deux charges concentrées, analogue à celui traité par M. Adrien Foch à propos du double pendule de torsion.

Soit donc une poutre de portée l (fig. 3), supportant aux points x_1 et x_2 , deux charges concentrées P_1 , P_2 de masses respectives M_1 et M_2 , qu'une cause fortuite aura mises en oscillation suivant la verticale oy .

Si l'on désigne par h_{ij} le déplacement produit au point x_i par une

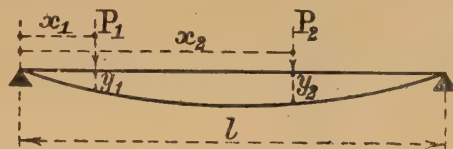


Fig. 3.

charge unité placée au point x_i , le déplacement vertical de la poutre au droit de la charge P_1 sera, dans l'état dynamique qui introduit les forces d'inertie :

$$y_1 = h_{11} (P_1 - M_1 y_1'') + h_{12} (P_2 - M_2 y_2'').$$

On en déduit l'équation différentielle du mouvement de P_1 :

$$h_{11} M_1 y_1'' + y_1 = h_{11} P_1 - h_{12} P_2 - h_{12} M_2 y_2''.$$

En posant, pour faciliter l'écriture :

$$(38) \quad h_{11} = \frac{1}{k_1}, \quad h_{22} = \frac{1}{k_2}, \quad h_{12} = h_{21} = h \text{ (réciprocité)},$$

il vient :

$$(39) \quad M_1 y_1'' + k_1 y_1 = P_1 - k_1 h P_2 - k_1 h M_2 y_2''$$

(1) Yves ROCARD. — Dynamique générale des vibrations. Éd. Gauthiers-Villars, Paris.

(2) Adrien FOCH. — Acoustique. Éd. Armand Colin, Paris.

(1) H. BÉGHIN. — Statique et Dynamique. Éd. Armand Colin, Paris.

et de même, pour le mouvement de P_2 :

$$(40) \quad M_2 y_2'' + k_2 y_2 = P_2 - k_2 h P_1 - k_2 h M_1 y_1''.$$

Les mouvements possibles du système sont ceux qui satisfont à la fois les deux équations (39) et (40), même en l'absence de la pesanteur, c'est-à-dire dans le plan horizontal où interviennent seules les forces élastiques et d'inertie. Faisons donc $P_1 = P_2 = 0$.

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$(41) \quad M_1 y_1'' + k_1 y_1 = -k_1 h M_2 y_2''.$$

$$(42) \quad M_2 y_2'' + k_2 y_2 = -k_2 h M_1 y_1''.$$

Éliminant y_2'' entre ces équations, il vient :

$$M_1 y_1'' (1 - k_1 k_2 h^2) + k_1 y_1 = k_1 k_2 h y_2.$$

Dérivons deux fois cette relation; on obtient :

$$(43) \quad M_1 y_1'''' (1 - k_1 k_2 h^2) + k_1 y_1'' = k_1 k_2 h y_2''.$$

On peut alors éliminer de nouveau y_2'' entre (40) et (43), ce qui donne finalement :

$$(44) \quad (1 - k_1 k_2 h^2) M_1 y_1'''' + \left(k_1 + k_2 \frac{M_1}{M_2}\right) y_1'' + \frac{k_1 k_2}{M_2} y_1 = 0.$$

En posant $(1 - k_1 k_2 h^2) = \Delta$ et introduisant les fréquences propres

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M_1}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{M_2}}$$

des masses isolées, on obtient l'équation différentielle du mouvement résultant, valable à la fois pour y_1 et y_2 puisque rien ne distingue plus dans (44) les coefficients k_1 et k_2 :

$$(45) \quad \Delta y'''' + (\omega_1^2 + \omega_2^2) y'' + \omega_1^2 \omega_2^2 y = 0.$$

Cherchons une solution de la forme :

$$(46) \quad y = a \sin(\nu t + \alpha).$$

On obtient pour la caractéristique de (45)

$$(48) \quad \Delta \nu^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \nu^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0$$

d'où l'on tire :

$$\nu^2 = \frac{1}{2\Delta} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4\Delta^2} (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\Delta}}$$

c'est-à-dire :

$$(49) \quad \nu^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\Delta} [1 \pm \sqrt{1 - 4\Delta\gamma}]$$

en posant :

$$(50) \quad \gamma = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}.$$

Nous verrons plus loin que le radical est toujours réel et que, par conséquent, il y a toujours mouvement oscillatoire mais de fréquence ν . Dès lors, on peut développer le radical en série suivant la formule du binôme, ce qui conduit aux expressions suivantes des deux valeurs de ν^2 :

$$(51) \quad \nu^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\Delta} [1 \pm (1 - 2\Delta\gamma - 2\Delta^2\gamma^2 - \dots)]$$

la série étant convergente du fait que $\Delta\gamma$ est $< \frac{1}{4}$.

Il y a donc deux fréquences résultantes dont la plus élevée, donnée par la série positive, dépend du facteur numérique Δ (fonction des positions des deux charges). La plus basse, donnée par la série négative, s'écrit, compte tenu de (50),

$$(52) \quad \min. \nu^2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} (1 + \Delta\gamma + \Delta^2\gamma^2 + \dots)$$

avec une forte convergence.

Une première conclusion se dégage de ces formules : quand les deux charges se trouvent réunies en un même point quelconque de la poutre, on a pour les coefficients d'influence (38) :

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{h}$$

et par conséquent :

$$\Delta = 0.$$

Il s'ensuit, d'après (51), que la fréquence maximum est infinie tandis que d'après (52), la fréquence minimum a pour carré

$$(53) \quad \nu^2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

On a donc :

$$\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}$$

et, en introduisant les périodes,

$$(54) \quad T^2 = T_1^2 + T_2^2.$$

Ainsi, les périodes propres T_1 et T_2 se composent géométriquement pour donner la période résultante T du mouvement lent.

Dans le cas où Δ n'est pas nul (ce qui a lieu dès que les charges se séparent), la fréquence maximum s'abaisse et peut être observée, tandis que la fréquence minimum s'élève et, en désignant par H^2 la valeur de la série (52), répond à la relation

$$(55) \quad \frac{H^2}{\nu^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}$$

d'où la relation des périodes :

$$(56) \quad H^2 T^2 = T_1^2 + T_2^2.$$

Une seconde conclusion tient dans cette remarque que, d'après (53), si l'une des fréquences propres croît indéfiniment devant l'autre, qui devient alors la fréquence basse, la fréquence résultante ν se confond avec cette dernière.

Le coefficient γ (50) est maximum quand les fréquences propres sont égales et il vaut alors $\frac{1}{4}$. Il tend vers zéro quand l'une des fréquences croît devant l'autre. Le coefficient Δ reste compris entre zéro et $\frac{1}{2}$.

On conçoit qu'en opérant ainsi sur un nombre n de charges distinctes, qui fourniraient n équations d'équilibre du type (41), on soit conduit à une équation différentielle du n° ordre pour la détermination de la fréquence ν du mouvement résultant. Les n racines de cette équation fourniraient donc n valeurs possibles de cette fréquence dont la plus basse caractérise ce qu'on appelle en acoustique le *mouvement fondamental*, les autres caractérisant les *partiels*. Quand ces partiels s'échelonnent suivant une série arithmétique de nombres entiers, ils constituent les *harmoniques*.

Si une force périodique agit sur une poutre chargée, elle peut entrer en résonance avec le fondamental ou bien avec l'un des partiels : on observe alors des régimes oscillatoires différents pour une même poutre sous les mêmes charges. Ce cas s'est présenté notamment dans les expériences effectuées par le « Bureau Véritas » sur les portiques roulants de Gennevilliers, expériences qui ont fait l'objet des études publiées par MM. Perrin (1), Buisson et Gellusseau (2).

(1) Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. Circulaire du 25 août 1946.

(2) Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. Circulaire du 16 juillet 1946.

1,5. Influence du poids de la poutre.

Les résultats qui précèdent vont nous permettre d'examiner le rôle du poids propre de la poutre que nous supposerons uniformément réparti à raison de p kg par m. La masse par unité de longueur sera donc :

$$m = \frac{p}{g}.$$

Examinons d'abord le comportement de la poutre sous cette seule charge. Les abscisses x étant toujours comptées suivant l'axe de la poutre à partir de son appui de gauche, soit y la déformation verticale au point x comptée vers le bas (fig. 4).

Si la poutre est en état oscillatoire, l'équation d'équilibre d'un élé-

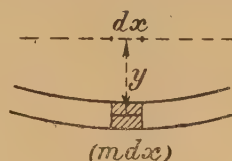


Fig. 4.

ment dx , de masse $d\mu = m dx$ et poids $p dx$, soumis en ce point à un mouvement vertical d'accélération

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

sera :

$$m dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E I d \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right) = p dx$$

d'où l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{E I}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = g.$$

La pesanteur g donne une déformation fixe qui s'exprimera par un polynôme du 4^e degré en x , représentant la déformation statique de la poutre.

Le mouvement oscillatoire, ou mouvement propre de la poutre, est celui qui répond à l'équation sans second membre :

$$(57) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{E I}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

dont la solution est fournie par une somme de termes de la forme

$$y = A \sin(\omega t + \alpha) \sin \gamma x$$

où A et α sont des constantes. Il est inutile, ici, de prévoir une constante de phase dans le terme en x car la condition d'avoir $y = 0$ aux extrémités de la poutre ($x = 0$ et $x = l$) n'en demande pas et se trouve satisfaite avec :

$$\gamma = \frac{\pi}{l} \text{ ou ses multiples.}$$

On a ainsi, en prenant $\alpha = 0$,

$$y''_t = -A\omega^2 \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$y^{IV}_x = A \frac{\pi^4}{l^4} \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Portant ces valeurs dans (57) on trouve la condition :

$$\frac{EI\pi^4}{ml^4} - \omega^2 = 0$$

d'où la pulsation :

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

et la période :

$$(58) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{m}{EI}}.$$

Introduisons la flèche statique sous charge uniforme :

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{EI}.$$

Il vient :

$$(59) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{0,8f}{g}}.$$

Ainsi, la poutre oscille sous son poids propre comme un pendule de longueur $0,8f$, f étant la flèche statique due à ce poids propre. Si ce dernier, $P_0 = pl$, était concentré au milieu de la portée, il donnerait à la poutre une flèche

$$f_2 = \frac{48EI}{pl^3}.$$

Introduisant cette flèche dans (58), on trouve pour nouvelle expression de la période :

$$(60) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{48}{\pi^4} \cdot \frac{f_2}{g}}$$

c'est-à-dire très sensiblement :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_2}{2g}}.$$

Autrement dit, la poutre oscille, sous son poids propre, comme si ce dernier était concentré au milieu de la portée mais réduit à la moitié de sa valeur.

Ceci posé, considérons le cas d'une poutre pesante, de poids $2P_2$, portant une charge concentrée de poids P_1 placée à distance x_1 de son appui de gauche. D'après ce qui précède, le poids propre $2P_2$ de la poutre peut être remplacé par un poids concentré P_2 placé au point $x_2 = \frac{l}{2}$. On est donc en présence d'un système de deux charges dont chacune donnerait au système une fréquence propre ω_1 ou ω_2 . La liaison imposée par la rigidité de flexion de la poutre entraîne un couplage oscillatoire dont les caractères découlent des formules précédentes.

Les coefficients (38) sont ici, en posant

$$\theta = \frac{x_1}{l},$$

$$k_1 = \frac{3EI}{l^3 \theta^2 (1 - \theta)^2},$$

rigidité sous la charge en x_1 ,

$$k_2 = \frac{48EI}{l^3},$$

rigidité au milieu,

$$h = \frac{l^3}{16EI} \left(\theta - \frac{4}{3} \theta^3 \right),$$

déformation en x_1 , sous $P_2 = 1$.

Par suite :

$$(61) \quad \Delta = 1 - k_1 k_2 h^2 = 1 - \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \frac{4}{3} \theta^2}{1 - \theta} \right]^2.$$

Tel est le coefficient Δ de la formule (45) pour chaque position

$x_1 = 0$ de la charge mobile. On voit que ce coefficient varie de $\frac{7}{16}$ à zéro quand la charge mobile passe de $x_1 = 0$ à $x_1 = \frac{l}{2}$ où elle se confond avec P_2 .

Nous pouvons maintenant conclure que :

Lorsque la charge mobile P_1 s'engage sur la poutre, la grande raideur locale k_1 de celle-ci lui confère une fréquence propre ω_1 , tout d'abord très grande, tandis que la charge fixe P_2 garde la fréquence propre constante ω_2 de la poutre. La fréquence basse ν du mouvement résultant se confond alors avec celle ω_2 de la poutre, tandis que la fréquence haute ν' de ce mouvement ne peut prendre une amplitude appréciable faute d'énergie disponible. On ne l'observe donc pas.

Puis, à mesure que la charge mobile s'avance, le coefficient Δ s'abaisse, ce qui relève davantage encore la haute fréquence ν' du résultant et donne à la fréquence basse ν de ce dernier la valeur définie par la relation (52). D'une façon générale, en calculant chaque fois la série H^2 , on pourra composer les périodes par la formule (56) qu'on écrira ici :

$$(62) \quad T^2 = \left(\frac{T_1}{H}\right)^2 + \left(\frac{T_2}{H}\right)^2,$$

ou faire la construction géométrique classique du triangle rectangle pour obtenir la *période longue*, seule apparente en pratique, du mouvement résultant.

En résumé, le poids propre de la poutre, ou du pont, a pour effet de diminuer considérablement les variations de la période d'oscillation du système au cours du passage de la charge. On peut dire que les ponts lourds stabilisent leur période. Et cela est d'autant plus marqué que, la fatigue de l'ouvrage sous l'ensemble des charges étant fixée d'avance, la participation relative de la surcharge diminue quand le poids du pont augmente.

1.6. Effet de mise en charge. Coefficient dynamique d'oscillation.

Le problème du coefficient de majoration dynamique pose celui de l'amplitude des oscillations des poutres chargées.

M. TIMOSHENKO a cherché à le résoudre dans le cas de la charge

concentrée mobile en assimilant cette dernière à une charge fixe placée au milieu de la poutre mais variant dans le temps suivant la loi

$$P = P_0 \sin \frac{\pi v t}{l}$$

de manière que la durée d'une demi-période de la pulsation se confonde avec la durée du passage de la charge mobile, à vitesse v , sur la poutre de longueur l .

Mais le résultat obtenu de cette façon se confond avec l'effet centrifuge calculé sans hypothèse par STOKES comme nous l'avons vu au paragraphe I,2. Il s'agit là, en effet, d'une pulsation forcée dont la dérivée seconde par rapport à t joue le même rôle que la courbure de la trajectoire dans le problème de STOKES. La majoration dynamique consécutive

$$\left(\frac{1}{1 - \beta v^2} \right) - 1 = \beta v^2 + \beta^2 v^4 + \dots$$

est de même forme que celle ²¹(22) de STOKES et se trouve, comme elle, bien déterminée.

Au contraire, l'amplitude du mouvement oscillatoire propre du système dépend seulement de la simple vitesse et n'est déterminée que pour des conditions initiales données.

Lorsqu'une charge mobile aborde une poutre, l'inertie de cette dernière ne lui permet pas de prendre immédiatement la déformation que requiert la force élastique nécessaire à l'équilibre.

Il en résulte une accélération des charges vers le bas, sous l'action excédante de la pesanteur et un accroissement consécutif de la force vive du système. L'énergie cinétique ainsi accumulée va permettre à ce dernier, après un retard à l'équilibre statique, de dépasser celui-ci pour y revenir ensuite. Si, dans ce phénomène, la masse et l'élasticité du système déterminent nettement l'intervalle des passages à l'équilibre, l'amplitude du mouvement entre ces passages dépend entièrement de la déformation et de la vitesse à l'origine du mouvement.

Considérons une charge mobile s'engageant sur une poutre pesante, de portée l . Si sa vitesse était négligeable, elle décrirait une courbe $S(x)$, suite continue de ses positions d'équilibre statique. Mais si sa vitesse est notable, nous avons vu que l'effet centrifuge accroît les ordonnées de cette courbe qu'elle affecte du coefficient

$$(63) \quad k_1 = 1 + \frac{v^2}{v_c^2 - v^2},$$

où v_0 est fonction de la position x de la charge. La courbe $S(x)$ est alors remplacée par la suite des positions d'équilibre dynamique centrifuge.

$$S_1 = k_1 S$$

fonction de x et de v .

Ceci s'amplifie maintenant du mouvement oscillatoire dont les calculs précédents déterminent la pulsation fondamentale v (53) ou la période T (54) correspondante. Le mobile ne rencontrera plus alors qu'en quelques points la trajectoire S_1 dont il s'écartera périodiquement de quantités variables (fig. 5).

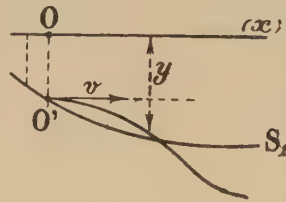


Fig. 5.

A partir d'un de ces points d'intersection, O' d'abscisse x , la trajectoire du mobile pourra s'écrire :

$$(64) \quad y = S_1(x + a) + A \sin \frac{vx}{v}$$

puisque

$$t = \frac{x}{v}.$$

Sa vitesse verticale sera donc :

$$u = \frac{dy}{dt} = v \frac{\partial S_1}{\partial x} + A v \cos \frac{vx}{v}$$

et en particulier au point O' ($x = 0$),

$$u_0 = v \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)_0 + A v.$$

Par suite, l'amplitude A de l'oscillation atteindra la valeur :

$$(65) \quad A = \frac{1}{v} \left[u_0 - v \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)_0 \right]$$

qui dépend comme on voit, d'une quantité indéterminée u_0 pouvant résulter aussi bien de causes fortuites telles que des chocs, que de l'état oscillatoire antérieur qui impose nécessairement ses conditions.

Pour obtenir cependant une valeur déterminée de cette amplitude, il paraît rationnel de se placer dans le cas moyen et le plus fréquent où la charge trouve la poutre dans un état de repos. Il en est toujours ainsi, en principe, quand la charge aborde le pont.

On a alors :

$$u_0 = 0$$

et par suite :

$$A = -\frac{v}{\nu} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)_0.$$

L'amplitude de l'oscillation sera donc ici, en introduisant la période T du système,

$$(66) \quad \mathfrak{A} = \frac{vT}{2\pi} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)_0.$$

Ainsi, cette amplitude dépend de la pente de la trajectoire centrifugée S_1 au point considéré et de la période T de l'oscillation fondamentale pour cette position de la charge.

Comme cette oscillation se poursuit suivant la loi (31), il suffit qu'elle soit amorcée en un point pour qu'on la retrouve tout au long de la traversée et notamment au milieu qui, pourtant, n'est pas un lieu générateur d'oscillations du fait que la pente de S_1 y est nulle. Ce sont les branches latérales de la trajectoire qui engendrent les plus grandes oscillations.

Le cas que nous venons de considérer correspond à une « descente en escalier » fréquemment observée sur les diagrammes d'essais des ponts; il n'est pas le plus défavorable car, le plus souvent, la vitesse u_0 est ascendante (donc négative) ce qui augmente A.

Lorsqu'on prend pour la courbe S_1 l'expression de la trajectoire limite (non centrifugée)

$$S = \frac{Px^2(l-x)^2}{3EI} \text{ (fig. 6)}$$

dont la pente au point x est :

$$\frac{dS}{dx} = \frac{2Px(l^2 - 3lx + 2x^2)}{3EI}.$$



Fig. 6.

On trouve cette pente maximum pour :

$$(67) \quad x_1 = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

où elle vaut :

$$\max. \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{Pl^2}{9\sqrt{3}EI} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{f_1}{l}$$

ou environ

$$(68) \quad 3 \frac{f_1}{l}$$

f_1 étant la flèche maximum sous la charge mobile P_1 passant au milieu.

Ceci conduit à une valeur numérique de $\mathcal{A}_0$ pour ce cas moyen.

Portant la valeur (68) de S' (à la place de S'_1) dans (66) on obtient l'amplitude

$$\mathcal{A}_0 = \frac{3f_1 v T}{2\pi l}$$

La majoration dynamique d'oscillation sera donc ici :

$$(69) \quad \frac{\mathcal{A}_0}{f_1} = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{vT}{l}$$

T étant la période fondamentale correspondant à la position donnée x_1 (67) de la charge mobile.

Or, cette période est sensiblement égale, comme nous l'avons vu, à

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}$$

où $f = f_1 + f_2$ est la flèche totale de la poutre sous l'ensemble des charges. Dans ces conditions, le rapport (69) s'écrit encore

$$(70) \quad \frac{\mathcal{A}_0}{f_1} = \frac{3v}{l} \sqrt{\frac{f}{g}}$$

C'est là la valeur de la majoration dynamique d'oscillation normale correspondant à l'arrivée d'une charge mobile sur une poutre en repos.

Mais, nous l'avons dit, le cas de $u_0 = 0$ n'est pas le plus défavorable et on observe fréquemment dans les ponts des oscillations dont la vitesse à l'origine de la période est voisine de la vitesse de flexion $v \frac{\partial S_1}{\partial x}$ changée de signe. On doit alors poser dans (65) :

$$u_0 = -v \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)_0$$

ce qui donne :

$$(71) \quad A = -\frac{2v}{v} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)_0.$$

et, par suite, au lieu de (70), la majoration

$$(72) \quad \frac{A_0}{f_1} = \frac{6v}{l} \sqrt{\frac{f}{g}}.$$

C'est la formule que nous conseillerons d'employer pour tenir compte de l'effet oscillatoire probable dans les poutres courtes simplement posées. Elle ne donne cependant que la moitié des résultats obtenus à Douai si fidèlement représentés par la formule de la page 4 (voir pl. II, p. ~~45~~⁸³) dont le coefficient est 4π au lieu de 6 mais dont la forme analytique, linéaire en v , est la même. C'est surtout ce fait que nous retiendrons en remarquant que des mouvements de lacet du wagon d'essai ont pû lui imprimer des freinages brusques se traduisant par des surcharges d'inertie sur l'essieu avant. Les impulsions consécutives sont, sans doute, en partie responsables des grandes amplitudes observées.

Si l'on fait état de ce que les ponts sont ordinairement construits de manière que leur flèche soit environ le $\frac{1}{1000}$ de leur portée, on pourra tirer de (72) une formule pratique de majoration dynamique. En prenant $g = 10$, on aura ainsi simplement :

$$\sqrt{\frac{f}{g}} = \frac{\sqrt{l}}{100}$$

et par suite

$$(72 \text{ bis}) \quad \frac{A_0}{f_1} = \frac{0,06v}{\sqrt{l}}.$$

Le coefficient dynamique d'oscillation serait donc, pour les poutres courtes,

$$(73) \quad 1 + \frac{6v}{l} \sqrt{\frac{f}{g}}$$

soit pratiquement :

$$(74) \quad 1 + \frac{0,06v}{\sqrt{l}}.$$

1.7. Coefficient dynamique total.

Nous venons de voir que le coefficient dynamique d'oscillation repose sur la pente de la trajectoire déformée par l'effet centrifuge. Le coefficient dynamique complet sera donc le produit des coefficients dynamiques centrifuge et oscillatoire. Le premier est celui (22)²¹ ou de STOKES qu'on écrira, d'après (12)

$$1 + \frac{v^2}{v_c^2 - v^2}.$$

Le second est donné par (73).

Le coefficient dynamique total sera donc :

$$(75) \quad K = \left(1 + \frac{v^2}{v_c^2 - v^2}\right) \left(1 + 6 \frac{v}{l} \sqrt{\frac{J}{g}}\right)$$

ou, pratiquement, en utilisant (23) et (74) :

$$(76) \quad K = \left(1 + \frac{v^2}{7500h}\right) \left(1 + \frac{0,06v}{\sqrt{l}}\right)$$

h et l étant respectivement la hauteur et la portée de la poutre en mètres, v la vitesse de la charge roulante en m/sec.

Pour simplifier encore les calculs numériques, il sera commode de poser

$$z = \frac{v}{10\sqrt{l}}$$

et de considérer le cas moyen très fréquemment réalisé où

$$h = \frac{l}{15}.$$

Le coefficient pratique prendra alors la forme :

$$(77) \quad K = 1 + 0,6z + 0,2z^2 + 0,12z^3$$

avec possibilité de négliger parfois le dernier terme qui représente l'action mutuelle des effets centrifuge et oscillatoire.

Bien entendu, ces formules pratiques ne conviennent que pour des valeurs assez faibles du rapport $\frac{v}{v_c}$ de la vitesse de passage à la vitesse critique (0,20 au plus). Pour des vitesses plus grandes, il faudrait revenir au coefficient de STOKES, ci-dessus rappelé, pour l'effet centrifuge et établir pour l'effet oscillatoire une formule tendant asymptotiquement vers

tiquement vers la valeur 2 qui correspond à l'application instantanée de la charge. L'expression suivante :

$$2 - e^{-\alpha v} = 1 + \alpha v - \frac{\alpha^2 v^2}{2} + \dots,$$

avec $\alpha = \frac{0,06}{\sqrt{l}}$, donnerait ce résultat tout en conservant la forme (74) aux petites vitesses.

I,8. Influence de l'encastrement.

Nous avons discuté le cas d'une poutre simplement posée (poutre isostatique). On peut se demander dans quelle mesure les résultats obtenus sont modifiés quand la poutre est encastree à ses extrémités.

En fait, la réaction centrifuge (12) et la majoration dynamique consécutive (22) ainsi que l'expression finale (35) de la période d'oscillation, les formules de couplage du paragraphe I,4 et, enfin, l'expression (66) de l'amplitude d'oscillation restent inchangées.

Seules sont à reprendre les expressions particulières de la vitesse critique v_c (11), les formules numériques consécutives (13), (14), (23) et, enfin, les coefficients des formules (69), (70) et (72).

Dans le cas d'encastrement parfait, la trajectoire de la charge a pour équation :

$$(78) \quad Y = \frac{Px^3(l-x)^3}{3El^3}$$

au lieu de (1). La pente maximum de cette trajectoire est, en fonction de la flèche maximum

$$f_1 = \frac{Pl^3}{192El},$$

$$\max. \left(\frac{\partial S}{\partial v} \right) = 3,4 \frac{f_1}{l}$$

au lieu de la valeur peu différente $\frac{3f_1}{l}$ (68) relative à la poutre isostatique. La formule (69) de la majoration d'oscillation deviendra donc ici

$$\frac{S_0}{f_1} = \frac{3,4}{2\pi} \cdot \frac{vT}{l}$$

pour la poutre attaquée en repos. Mais comme la période T sera réduite de moitié du fait que l'encastrement réduit la flèche au quart de celle de la poutre isostatique, on trouvera un effet dynamique d'oscillation réduit dans la proportion de

$$\frac{3,4}{3} \times \frac{1}{2} = 0,57.$$

D'autre part, la courbure de (78) est, au maximum négatif qui nous intéresse seul ici,

$$(79) \quad Y'' = \frac{-Pl}{8EI}$$

soit les $\frac{3}{8}$ de la courbure de la poutre isostatique. La vitesse critique v_c (9), page 8, sera donc augmentée dans la proportion

$$\sqrt{\frac{8}{3}} = 1,63.$$

La formule (12) en donnera alors la conséquence qui, pour v assez petit devant v_c , se traduira par un effet centrifuge réduit dans la proportion :

$$\left(\frac{1}{1,63}\right)^2 = 0,37$$

ce qui est appréciable.

En résumé, on peut dire que l'encastrement réduit l'effet centrifuge au tiers de sa valeur et l'effet oscillatoire à ses deux tiers. La formule (77), révisée pour ce cas, deviendra donc ici :

$$(80) \quad K_1 = 1 + 0,4z + 0,06z^2 + 0,02z^3.$$

On n'aura guère l'occasion d'appliquer cette formule dans les ponts, même dans le cas des longerons qui ne sont pas des pièces parfaitement encastrees mais des poutres à rotation gênée sur appuis. Il est prudent de conserver pour ces derniers un coefficient dynamique élevé du fait qu'ils reçoivent des chocs dont l'effet s'ajoute à ceux que nous venons d'analyser. L'importance éventuelle de ce nouvel effet (effet d'impact) mérite d'ailleurs un examen particulier.

1,9. Effet d'impact.

Nous appellerons ainsi l'effet d'un choc normal à l'axe de la poutre.

On ne peut tenir compte d'un tel effet dans l'établissement d'un coefficient dynamique parce qu'il n'est pas systématique, comme les effets centrifuge et de mise en charge, mais accidentel.

Lorsqu'on doit prévoir un choc, il y a lieu d'en faire le calcul direct comme dans le cas d'une charge statique donnée. On opérera pour cela de la manière suivante :

Soit une poutre horizontale en repos (fig. 7), de masse totale M_0 , heurtée par une masse M_1 animée d'une vitesse u_1 . Dès que le contact

s'établit entre ces deux éléments, le point de la poutre touché par la charge prend immédiatement la vitesse de celle-ci tandis que les parties voisines ne sont entraînées qu'après une déformation élastique qui se propage depuis le point d'impact jusqu'aux extrémités maintenues fixes. Il y a ainsi deux ondes, l'une de tension normale, l'autre de cisaillement, qui se propagent avec des vitesses différentes, $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ et $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$, assez grandes toutefois pour que l'ensemble de la poutre soit ébranlé avant

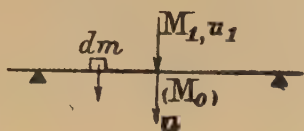


Fig. 7.

la fin de l'acte de choc qui distribue l'impulsion de la masse incidente entre celle-ci et la poutre.

A la fin de cet acte, chacun des points de la poutre, de masse $dm = \rho S dx$, possède une vitesse verticale w , le point d'impact qui accompagne la masse frappante ayant la vitesse particulière u .

Le principe de conservation de la quantité de mouvement donne alors :

$$(81) \quad M_1 \dot{u}_1 = M_1 u + \int_0^l w dm.$$

La distribution des vitesses $w(x)$ est inconnue mais on sait que les vitesses sont proportionnelles aux déformations infinitésimales du premier instant. BARRÉ DE SAINT-VENANT qui, le premier, a traité de cette question, a admis que ces déformations sont homothétiques à celles de la flexion statique sous une charge concentrée au point d'impact. Mais si la masse de la poutre est prédominante nous savons, d'après les résultats du paragraphe I,5, que la déformation est surtout sinusoïdale. Dans ces conditions, on posera :

$$(82) \quad w = cu \sin \frac{\pi x}{l}$$

avec $c = 1$ quand le point d'impact est au milieu de la portée, ce que nous supposons tout d'abord. On aura alors :

$$(83) \quad \int_0^l w dm = \rho S \int_0^l w dx = \frac{2\rho S l}{\pi} u$$

ou, puisque $\rho Sl = M_0$ est la masse totale de la poutre,

$$\int_0^l w dm = \frac{2}{\pi} M_0 u.$$

La condition (81) donnera donc :

$$M_1 u_1 = \left(M_1 + \frac{2}{\pi} M_0 \right) u$$

d'où l'on tirera :

$$(84) \quad u = \frac{u_1}{1 + \frac{2}{\pi} \frac{M_0}{M_1}}.$$

C'est la formule de SAINT-VENANT avec le coefficient $\frac{2}{\pi}$ au lieu de $\frac{17}{35}$ fourni par l'hypothèse de la déformation statique. Elle représente la vitesse de la masse incidente et de la poutre au point d'impact à l'origine de la flexion dynamique qui va résulter du choc. On reconnaîtra, dans le rapport $\frac{u}{u_1}$ qu'on en déduit, la forme du dernier terme du coefficient dynamique du règlement français de 1927 dont nous avons parlé. Ce rapport mesure bien l'effet réducteur de la masse de la poutre, mais la vitesse d'impact u_1 est accidentelle et n'est nullement attachée à la structure du système. En supprimant toute cause de choc, on aura $u_1 = 0$.

La vitesse u (84) n'est autre que la vitesse qui, au paragraphe I.6, p. 23, caractérise la vitesse initiale à l'origine de l'oscillation. Le calcul de cette oscillation et de ses conséquences pourra donc se poursuivre ici comme nous l'avons indiqué dans les paragraphes précédents.

Si le point d'impact n'était pas le milieu de la portée mais un point d'abscisse $x_1 = a$, on en tiendrait compte en prenant pour le coefficient c de (82) l'expression :

$$(85) \quad c = \frac{1}{\sin \frac{\pi a}{l} + \varepsilon}$$

ε étant un correctif de l'ordre de 0,1 qui tient compte de la déformation locale autour du point d'impact (sorte d'empreinte élastique n'intéressant pas la flexion). C'est cette déformation qui absorbe la plus grande partie de l'énergie du choc au voisinage des appuis. Elle peut être négligée dans l'intervalle :

$$0,2 < \frac{a}{l} < 0,8.$$

En reprenant le calcul ci-dessus, on trouverait alors que plus la poutre est choquée loin de son milieu, plus sa masse réagit fortement et

atténue, par suite, sa flexion dynamique : le coefficient $\frac{2}{\pi}$ de (84) est un minimum.

Dans le cas du choc au joint des rails, on appliquera facilement les formules en remarquant qu'une roue de diamètre D (fig. 8) franchissant à vitesse v un joint d'ouverture e donne une vitesse verticale d'impact :

$$u_1 = \frac{ve}{D}.$$

La formule (84) donnera alors la vitesse u (ou u_0) communiquée à la poutre qui prendra un mouvement oscillatoire :

$$(86) \quad y = \frac{u_0}{v} \sin vt$$

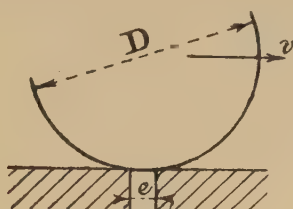


Fig. 8.

v étant la fréquence basse calculée par la formule (52), (53) ou (55), page 17.23.

L'amplitude en sera :

$$(87) \quad \mathcal{A} = \frac{u_0}{v} = \frac{ve}{Dv} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \frac{M_0}{M_1}}.$$

On peut aussi, en introduisant la période d'oscillation $T = \frac{2\pi}{v}$ écrire cette amplitude :

$$(88) \quad \mathcal{A} = \frac{e}{D} \cdot \frac{vT}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \frac{M_0}{M_1}}.$$

C'est donc encore un effet proportionnel à la simple vitesse de passage et à la période propre d'oscillation du système, mais il dépend aussi de l'ouverture e du joint qu'on peut réduire autant que l'on veut ou même supprimer.

On calculera la surcharge statique P' équivalente à l'effet dynamique (88) en introduisant la raideur k (1 bis), p. 76, de la poutre, ce qui donnera, pour $x = \frac{l}{3}$,

$$(89) \quad P' = \frac{48EI}{l^3} \cdot \mathcal{A}.$$

II. GRANDES POUTRES.

II,1. Généralités.

Les poutres des grands ouvrages sont, du fait de leur longueur, mises en charge avec une certaine lenteur. En outre, leur flèche étant toujours, par construction, une même fraction de la portée, le rayon de courbure de leur flexion est augmenté en proportion.

Pour ces raisons, les effets oscillatoire et centrifuge précédemment étudiés sont, dans ces poutres, sensiblement amoindris comme le fait d'ailleurs prévoir le coefficient dynamique (77) encore applicable ici, au facteur numérique près.

Par contre, la masse et la charge permanente des grandes poutres leur confèrent une période d'oscillation notable, souvent du même ordre que celle due à la surcharge seule, de sorte que l'intervention de celle-ci ne fait pas varier la période de l'ensemble dans des limites aussi étendues que dans les petits ponts. Il s'ensuit qu'à l'occasion du passage d'un convoi homogène à essieux équidistants martelant un joint de rails sur un grand pont, un phénomène de résonance peut apparaître qu'il faut savoir prévenir.

Toutefois, l'amortissement interviendra qui limitera cet effet, en sorte que nous concluons tout de même à une moindre sensibilité des grands ponts aux actions dynamiques conformément à l'opinion courante.

L'analyse de la flexion dynamique et oscillatoire des grands ouvrages présente donc un certain intérêt ne serait-ce que pour confirmer cette opinion. Elle s'impose, en tout cas, pour apporter à la technique des éléments calculables qui font actuellement défaut.

L'étude de la flexion dynamique des grandes poutres a été faite, comme nous l'avons dit, par RENAUDOT qui, pour ce cas, a assimilé la surcharge du train à une charge uniforme partielle progressant à la vitesse v sur l'ouvrage à partir d'une de ses extrémités pour le couvrir finalement en entier.

Cependant, pour résoudre ce problème sous sa forme générale, RENAUDOT a dû recourir, comme STOKES, à des développements en série dont les coefficients sont à former suivant des formules qu'il établit dans son mémoire. Il reste, en définitive, à trouver quatre fonctions du temps qui satisfassent aux conditions particulières du problème, fixité des abouts et raccordement des deux courbes définissant la déformation de la poutre sous la surcharge et hors d'elle.

L'emploi de ces séries non symbolisées a l'inconvénient de ne pas montrer l'allure du phénomène et, notamment, les rôles distincts de l'effet centrifuge et de l'effet oscillatoire. Les seules applications qui aient été faites de la méthode de RENAUDOT se limitent d'ailleurs au calcul de l'effet centrifuge.

L'étude de BRESSE, qui reprend le problème de RENAUDOT dans le cas plus simple où le pont est entièrement couvert par la surcharge, redonne bien évidemment un résultat de RENAUDOT, mais encore seulement pour l'effet centrifuge. En assimilant ce problème à celui d'un cas de flambage de poutre comprimée, BRESSE n'a guère éclairé la question traitée où l'effet oscillatoire n'apparaît toujours pas.

C'est cependant en abordant le problème dans l'hypothèse simplifiée de BRESSE (surcharge uniforme totale) que nous établirons d'abord l'effet centrifuge, puis l'effet oscillatoire pour en généraliser ensuite les résultats dans l'hypothèse de RENAUDOT.

II.2. Problème de Bresse.

Considérons (fig. 9) une poutre de portée l et de poids p par unité de longueur, portant une surcharge continue p' circulant sur elle à la vitesse uniforme v . La poutre est supposée rectiligne avant l'application des charges p et p' (ouvrage mis en place après sa construction sur plancher de montage).

BRESSE a traité ce problème en le ramenant à celui d'une poutre comprimée et fléchie par flambage qui répond effectivement à la même équation différentielle. A la charge critique de flambage correspond alors une vitesse critique de passage de la charge mobile sur le pont.

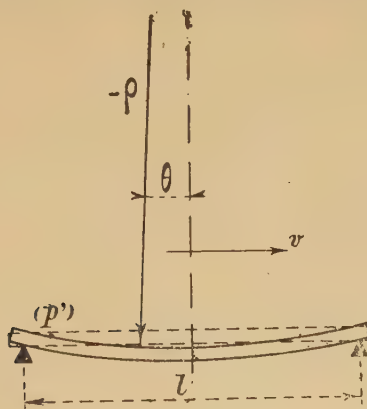


Fig. 9.

Nous préférons conserver à ce problème son sens physique d'origine en reliant directement le moment fléchissant du pont à l'ensemble de ses charges et de leurs forces d'inertie, puis nous aborderons l'étude des oscillations qui n'apparaissent pas dans l'analyse de BRESSE.

II,3. Effet centrifuge.

La poutre, fléchissant sous les charges, prend un certain rayon de courbure négatif $-\rho$ qui provoque, de la part de la charge circulante $p' = m'g$, une réaction centrifuge $\frac{m'v^2}{\rho}$ par unité de longueur. On conçoit qu'un équilibre stable puisse s'établir ainsi où la charge unitaire réelle est :

$$(90) \quad (p + p') - \frac{p'v^2}{\rho g} \cos \theta$$

le rayon étant compté positivement vers le bas avec les y . Il est alors négatif dans la pratique.

Mais, d'autre part, la courbure est liée, comme on sait, au moment fléchissant $\mathcal{M}$ de la poutre par la relation :

$$(91) \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial I} = -\frac{1}{\rho}$$

et, d'autre part, la variation seconde de ce moment est égale à la charge unitaire effective (90) changée de signe, soit :

$$(92) \quad \frac{d^2 \mathcal{M}}{dx^2} = -(p + p') + \frac{p'v^2}{\rho g} \cos \theta$$

relation exempte de toute approximation, mais à laquelle on conservera encore sa rigueur en prenant $\cos \theta = 1$. On aura donc, d'après (91), l'équation différentielle :

$$(93) \quad \frac{d^2 \mathcal{M}}{dx^2} + \frac{p'v^2}{gEI} \mathcal{M} = -(p + p')$$

définissant la distribution des moments dans la poutre. L'intégration donne immédiatement :

$$(94) \quad \mathcal{M} = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x - \frac{p + p'}{\alpha^2}$$

en posant :

$$(95) \quad \alpha^2 = \frac{p'v^2}{gEI}$$

et A et B étant deux constantes déterminées par les conditions aux limites. Ces conditions sont fournies par la fixité des abouts appuyés de la poutre qui impose :

$$\mathcal{M} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \quad \text{et } x = l,$$

d'où, pour $x = 0$,

$$A - \frac{p+p'}{\alpha^2} = 0$$

et, pour $x = l$:

$$A \cos \alpha l + B \sin \alpha l - \frac{p+p'}{\alpha^2} = 0.$$

On en tire :

$$(96) \quad A = \frac{p+p'}{\alpha^2}$$

$$(97) \quad B = \frac{p+p'}{\alpha^2} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha l)}{\sin \alpha l}.$$

L'expression complète du moment fléchissant (94) s'écrira donc :

$$(98) \quad \mathcal{M} = \frac{p+p'}{\alpha^2} \left[\frac{(1 - \cos \alpha l)}{\sin \alpha l} \sin \alpha x - (1 - \cos \alpha x) \right].$$

On voit que ce moment devient infini pour $\alpha l = \pi$ ce qui définit une vitesse critique :

$$(99) \quad v_c = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EIg}{p'}}$$

analogue à (11) du paragraphe I,1 et que l'on peut rattacher à la pulsation propre du pont en charge :

$$(100) \quad \omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{p+p'}}.$$

On trouve alors, en introduisant la période

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$(101) \quad v_c = \frac{2l}{T} \sqrt{\frac{p+p'}{p'}}.$$

Cette vitesse critique est, pour les grands ponts, assez élevée pour qu'on n'ait pas à s'en inquiéter actuellement. La période d'oscillation des ponts étant, en effet, de l'ordre du quart de seconde et le radical

de (101) toujours supérieur à 1, la vitesse critique est au moins égale à $8l$, soit 160 m à la seconde (445 km/h) sur un pont de 20 m.

L'expression exacte (98) du moment fléchissant étant d'un emploi peu commode en raison de la petitesse de α , on a avantage, dans ces conditions, à lui substituer un développement en série, d'ailleurs très convergent pour les vitesses en usage dans les chemins de fer.

En développant en série les expressions trigonométriques de (98) et effectuant les opérations indiquées, on parvient à la formule algébrique :

$$\mathfrak{M} = \frac{p+p'}{2} \left[(lx - x^2) + \frac{\alpha^2}{12} (l^3x - 2lx^3 + x^4) - \dots \right]$$

ou :

$$(102) \quad \mathfrak{M} = \frac{p+p'}{2} (lx - x^2) \left[1 + \frac{\alpha^2}{12} (l^2 + lx - x^2) - \dots \right].$$

Sous cette forme, on voit nettement se détacher la majoration dynamique de l'effet centrifuge qui n'est autre que la série des termes entre crochets qui suivent l'unité.

En pratique, on peut se limiter au terme :

$$\frac{1}{12} \alpha^2 (l^2 + lx - x^2)$$

qui est maximum pour $x = \frac{l}{2}$ où il vaut $\frac{5}{48} \alpha^2 l^2$.

On aurait donc pour coefficient dynamique de l'effet centrifuge :

$$(103) \quad k = 1 + \frac{5}{48} \alpha^2 l^2$$

ou d'après (95) :

$$k = 1 + \frac{5}{48} \cdot \frac{p'v^2 l^2}{gEl}.$$

En se reportant aux conditions pratiques de la page ⁹ 8, on peut l'écrire, en désignant toujours par h la hauteur de la poutre travaillant à un taux $N = \frac{E}{2000}$,

$$(104) \quad k = 1 + \frac{v^2}{12000h}.$$

On retrouve une majoration analogue à (14), mais plus réduite du fait de la répartition de la surcharge.

Une particularité de la majoration dynamique dans (102) est qu'elle s'applique à l'ensemble des charges (fixe et mobile) et non pas seulement à la charge mobile. Cela tient à ce que la charge fixe intervient dans la courbure totale de la poutre. Ceci nous amène à considérer la correction à introduire dans les résultats précédents quand la poutre est construite avec une contre-courbure (on dit contre-flèche).

II,4. Influence de la contre-courbure.

Dans les grands ouvrages, on donne souvent aux poutres principales une contre-courbure $\frac{1}{\rho_0}$ qui corrige en partie l'effet de la courbure de flexion $\frac{1}{\rho}$.

La courbure totale est alors $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0}$ et la force centrifuge devient :

$$m'v^2 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \right) \cos \theta.$$

La charge effective est alors, au lieu de (90) et pour $\cos \theta = 1$,

$$(p + p') - \frac{p'v^2}{g} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \right).$$

L'équation (92) devient :

$$\frac{d^2 \mathcal{U}}{dx^2} = - (p + p') + \frac{p'v^2}{g} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \right)$$

et comme la courbure de flexion est toujours :

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\partial \mathcal{U}}{EI}$$

on a finalement, au lieu de (93), l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \mathcal{U}}{dx^2} + \frac{p'v^2}{gEI} = - \left[p + p' \left(1 - \frac{v^2}{g\rho_0} \right) \right].$$

Ainsi, le module (95)

$$\alpha^2 = \frac{p'v^2}{gEI}$$

reste inchangé et, seules, les constantes A et B sont modifiées. On a maintenant :

$$A = \frac{1}{\alpha^2} \left[p + p' \left(1 - \frac{v^2}{g\rho_0} \right) \right]$$

$$B = \frac{1}{\alpha^2} \left[p + p' \left(1 - \frac{v^2}{g\rho_0} \right) \right] \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l}.$$

L'expression (102) du moment fléchissant s'en trouve également modifiée pour devenir :

$$(105) \quad \mathcal{M} = \frac{1}{2} \left[p + p' \left(1 - \frac{v^2}{g\rho_0} \right) \right] (lx - x^2) [1 + \dots]$$

le développement en (α, x) restant identique.

Ainsi, tout se passe comme si la surcharge p' était réduite par le terme $\left(1 - \frac{v^2}{g\rho_0} \right)$ qui peut, théoriquement, être amené à zéro. On se gardera d'en considérer les valeurs négatives car la liaison de la surcharge et du rail est unilatérale.

La courbure naturelle de la poutre sous les charges est négative. La contre-courbure sera donc positive, ce qui lui confère le pouvoir réducteur ci-dessus.

La courbe étant très tendue, la contre-flèche f_0 peut être rattachée à la portée et à la contre-courbure par la relation simple :

$$f_0 = \frac{l^2}{8\rho_0}.$$

Par suite :

$$(106) \quad \frac{v^3}{g\rho_0} = \frac{8f_0v^2}{gl^2}.$$

Une contre-flèche de l'ordre de $\frac{l}{1000}$ conduirait donc à :

$$\frac{v^3}{g\rho_0} = \frac{8v^2}{10.000l}$$

soit à une réduction de $\frac{1}{10}$ pour $v^2 = 1000$ (112 km/h) et $l = 8$ m.

C'est la valeur même de l'effet centrifuge, qui se trouve ainsi annulé.

Mais l'effet oscillatoire dû à la rapidité de mise en charge n'en est pas modifié.

II.5. Oscillations.

Pour étudier les effets oscillatoires, nous devons revenir à la déformation y en chaque point de la poutre. Si nous exprimons la courbure par $\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, l'étude de la déformation élastique nous conduit à l'équation différentielle :

$$(107) \quad EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{p'v^2}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{(p+p')}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

qui exprime l'équilibre entre les seules forces élastiques et d'inertie, à l'exclusion de la pesanteur (mouvement dans le plan horizontal).

Cette équation est satisfaite par des expressions de la forme :

$$(108) \quad y = A \sin \gamma x \sin \omega t$$

à la condition que :

$$(109) \quad \omega = \gamma \sqrt{\frac{Elg}{\rho + \rho'} \left(\gamma^2 - \frac{\rho' v^2}{Elg} \right)}.$$

La condition que γ s'annule pour $x = 0$ et $x = l$ entraîne d'ailleurs pour γ la valeur :

$$(110) \quad \gamma = \frac{\pi}{l}$$

ce qui détermine ω . Ainsi, il y a un mouvement propre, ou naturel, de la poutre qui est oscillatoire si la vitesse du convoi sur le pont n'excède pas la valeur critique :

$$(111) \quad v_c = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{Elg}{\rho'}}$$

identique à (99) du paragraphe II,3.

La formule (109) généralise l'expression obtenue au paragraphe I,5 pour la pulsation ω de la poutre sous son poids propre. On en déduit la période :

$$(112) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{\rho + \rho'}{Elg (1 - \beta^2)}}$$

qui généralise la formule (58) avec :

$$\beta^2 = \frac{v^2}{v_c^2} = \frac{\rho' v^2 l^2}{\pi^2 Elg}.$$

On retrouve cet allongement de la période déjà rencontré dans le cas des poutres courtes à surcharge ponctuelle avec cette différence que les deux vitesses critiques sont maintenant confondues.

Les conséquences de l'allongement de la période prennent ici une nouvelle forme puisque l'action de la surcharge n'est plus nécessairement éphémère. Le passage peut se prolonger, par hypothèse, aussi longtemps qu'on voudra.

Si, donc, une flèche d'équilibre f_0 étant atteinte sous une surcharge mobile p' de vitesse v , on vient à augmenter brusquement cette vitesse

de v à v_1 , une nouvelle flèche d'équilibre f_1 devra s'établir. Or, ceci ne pourra se faire que par un mouvement oscillatoire d'amplitude :

$$a = f_1 - f_0$$

et de période T donnée par (112).

Ce mouvement sera conforme à l'expression :

$$y = a \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right)$$

et donnera la nouvelle flèche après un temps :

$$t_1 = \frac{T}{4}$$

puis la flèche $f_1 + a$ au temps $\frac{T}{2}$ à l'amortissement près.

Si la surcharge p' est très petite, le rapport β sera négligeable et ces résultats seront obtenus dans les délais de la période statique. Mais si elle est notable et sa vitesse élevée, l'allongement de la période pourra être assez grand pour retarder beaucoup l'établissement de la nouvelle flèche f_1 . On peut même dire, enfin, qu'à la vitesse critique (111), la flèche initiale f_0 ne pourra plus changer.

C'est dire que le phénomène oscillatoire, aux grandes vitesses, s'oppose à l'accroissement de courbure causé par la force centrifuge. Il modère ou arrête l'action dynamique centrifuge après l'avoir renforcée aux vitesses inférieures.

II.6. Problème de Renaudot.

Nous généraliserons maintenant le problème de BRESSE en considérant le cas où la surcharge, toujours en mouvement, n'occupe pas encore entièrement le pont mais le couvre seulement sur une longueur $a < l$ à partir de son appui de gauche (fig. 10).

C'est, nous l'avons dit, le problème traité dès 1860 par RENAUDOT, mais que nous aborderons ici d'une manière différente pour mieux discerner les divers phénomènes qui s'y présentent.

Assimilons donc le convoi mobile à une surcharge continue partielle

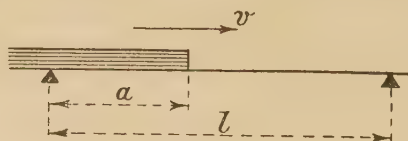


Fig. 10.

de p' kg/m occupant à l'instant t considéré, la longueur a qui varie continuellement avec la vitesse :

$$v = \frac{da}{dt}$$

Le poids propre du pont constitue, en outre, une charge permanente fixe de p kg/m.

L'équilibre d'un élément du pont pris dans la partie a occupée par le convoi est donné par l'équation différentielle :

$$(112) \quad EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{p'v^2}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{(p+p')}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (p+p')$$

obtenue en écrivant, comme au paragraphe II,5, la nullité de la résultante des forces gravifiques, élastiques et d'inertie.

L'équilibre d'un élément du pont pris dans la partie $(l-a)$ non chargée (où $p' = 0$) est alors exprimé par :

$$(113) \quad EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{p}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p.$$

On voit immédiatement que les mouvements propres des deux branches a et $(l-a)$ de la poutre seront différents, d'où résultera une certaine complexité des mouvements oscillatoires.

Mais le terme $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ qui figure maintenant dans les équations ne comprend plus seulement l'accélération du mouvement propre : il est la somme de cette dernière et d'une *accélération forcée* résultant du déplacement continu de la charge qui modifie sans cesse les déformations du pont.

On peut établir l'équation de la ligne déformée de la poutre sous une charge continue partielle d'étendue a et en déduire l'accélération forcée, en chaque point, quand a varie avec le temps. Mais cette fonction, algébrique, ne se prêterait pas à l'intégration des équations ci-dessus. Cependant comme elle s'annule aux appuis ($x = 0$ et $x = l$) et seulement là, on peut la considérer comme la phase d'une fonction périodique et la décomposer en une série de FOURIER appropriée dont tous les termes se prêteront à l'intégration.

Ceci étant, nous nous bornerons, devant l'intérêt d'aboutir à des formules simples utilisables en pratique, à représenter cette courbe de déformation forcée par un seul terme sinusoïdal, en x et t , donnant la flèche maximum f_1 due au passage du convoi au bout du temps $t_1 = \frac{l}{v}$ de la mise en charge complète du pont.

Ce sera donc :

$$(114) \quad y_1 = f_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi v t}{2l}$$

donnant pour expression de l'accélération forcée :

$$(115) \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -\frac{\pi^2 v^2}{4l^2} f_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi v t}{2l}.$$

Si l'on pose alors :

$$y = y_1 + y_2,$$

et qu'on reprenne, par exemple, l'équation (112) de la branche a , on sera fondé à séparer le mouvement forcé y_1 et le mouvement propre y_2 qui répondront respectivement aux deux équations différentielles :

a . Mouvement forcé :

$$(116) \quad EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + \frac{p'v^2}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = (p + p') - \frac{(p + p')}{g} \frac{\pi^2 v^2}{4l^2} f_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi v t}{2l};$$

b . Mouvement propre :

$$(117) \quad EI \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + \frac{p'v^2}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + \frac{(p + p')}{g} \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0.$$

La première n'est autre qu'une généralisation de l'équation (93), puisque :

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = -\frac{\mathcal{M}}{EI},$$

et la seconde se confond avec (107), conduisant à un mouvement propre oscillatoire dont la fréquence est donnée par (109) si la vitesse est inférieure à la valeur critique (111).

Mais, ici, γ n'est plus nécessairement égal à $\frac{\pi}{l}$ puisqu'il dépend des conditions de raccordement des deux branches de la courbe.

Nous pouvons maintenant apprécier les effets dynamiques dans le cas de charge envisagé par RENAUDOT.

II.7. Effets centrifuge et de progression.

En posant :

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = -\frac{\mathcal{M}}{EI} \quad \text{et} \quad \alpha^2 = \frac{p'v^2}{gEI},$$

l'équation (116) s'écrit :

$$(119) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} + \alpha^2 \mathcal{M} = -(p + p') + \frac{(p + p')}{g} \frac{\pi^2 v^2}{4l^2} f_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi v t}{2l}.$$

La solution en est :

$$(120) \quad \mathcal{M} = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x - \frac{p+p'}{\alpha^2} - M \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi vt}{2l}.$$

C'est celle de l'équation (94) augmentée d'un terme correspondant au mouvement forcé. Cependant, comme le convoi n'occupe sur la poutre qu'une longueur $a < l$, le facteur B est différent de celui de (94) et dépend même de a qui varie dans le temps; mais le rôle de cette fonction du temps est joué ici par le terme relatif au mouvement forcé. Par suite, on peut regarder B comme une constante et déterminer sa valeur par la condition que les deux branches a et $l-a$ de la poutre se raccordent au point $x=a$ dans un état d'équilibre stable. Ceci suppose que le convoi quitte le pont en ce point pour progresser en dehors de lui : certes, ce n'est là qu'une vue de l'esprit, mais elle précise bien l'indépendance de l'effet centrifuge à l'égard de celui de mise en charge ou, mieux, de *progression du convoi*.

Nous ne développerons pas ici le calcul des coefficients A et B dans l'hypothèse de RENAUDOT. Nous indiquerons seulement que le coefficient A de (120) conserve la même valeur (96) que dans l'hypothèse de BRESSE, soit :

$$(121) \quad A = \frac{p+p'}{\alpha^2}$$

qui résulte encore de la condition $\mathcal{M} = 0$ pour $x = 0$, mais que le coefficient B répond, dans la branche a de la courbe de déformation du pont, à l'expression :

$$(122) \quad B = \frac{\frac{1}{2} p (l-a)^2 + \frac{p+p'}{\alpha^2} [(1 - \cos \alpha a) + \alpha (l-a) \sin \alpha a]}{\sin \alpha a + \alpha (l-a) \cos \alpha a}$$

ou encore :

$$(123) \quad B = \frac{\frac{1}{2} p (l-a)^2 + \frac{p+p'}{\alpha^2} \left[1 - \frac{\cos (\alpha a + \varphi)}{\cos \varphi} \right]}{\sin (\alpha a + \varphi) \sqrt{1 + \alpha^2 (l-a)^2}}$$

$$(124) \quad \text{avec } \operatorname{tg} \varphi = \alpha (l-a).$$

Ces formules généralisent l'expression (97) de II,2, à laquelle elles se réduisent pour $a = l$ ou $\varphi = 0$.

En poussant plus loin l'analyse, on verrait que le moment maximum, qui a lieu d'abord au milieu de la poutre sous la charge permanente seule, se déplace vers le train et revient dans le sens de la marche pour atteindre le centre quand la tête du train est au bout du pont.

En définitive, on reconnaîtra aisément que l'effet centrifuge est maximum lors du chargement complet du pont par le train et qu'il suffit alors de l'évaluer au moyen des formules du paragraphe précédent.

Mais le dernier terme de l'équation (120) nous apprend quelque chose de nouveau : il fait apparaître un moment supplémentaire

$$(125) \quad \Delta \mathcal{M} = M \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi v t}{2l}$$

dû à la seule progression du convoi.

Pour qu'il satisfasse à l'équation (119), il faut que :

$$M \frac{\pi^2}{l^2} - M \alpha^2 = \frac{p+p'}{g} \cdot \frac{\pi^2 v^2}{4l^2} f_1$$

d'où :

$$M = \frac{(p+p')}{4gl^2} \cdot \frac{\pi^2 v^2 f_1}{\frac{\pi^2}{l^2} - \alpha^2}$$

En notant que :

$$\alpha^2 = \frac{p'v^2}{EIg} = \frac{\pi^2 v^2}{l^2 v_c^2},$$

v_c étant la vitesse critique (99), on peut écrire :

$$(126) \quad M = \frac{1}{4g} (p+p') f_1 \frac{v^2}{1-\beta^2}$$

en posant :

$$\frac{v}{v_c} = \beta.$$

C'est la valeur maximum du moment supplémentaire de progression (125) ; elle a lieu au milieu du pont et quand la tête du convoi atteint l'extrémité, c'est-à-dire en même temps que l'effet centrifuge maximum calculé au paragraphe précédent et auquel il s'ajoute.

On voit par l'expression (126) que ce moment supplémentaire peut prendre des proportions notables en raison du diviseur $(1 - \beta^2)$. Mais nous avons vu au paragraphe II,5 que ce même facteur retarde la déformation consécutive, en sorte que le danger s'éloigne à mesure qu'il grandit.

II,8. Oscillations.

Les mouvements oscillatoires du système sont régis par les équations (112) et (113) prises sans second membre, soit :

$$(127) \quad EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{p'v^2}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{(p+p')}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

pour la branche a ,

$$(128) \quad EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

pour la branche $(l - a)$.

La première, identique à (107), entraîne un mouvement propre :

$$(129) \quad y_1 = \mathfrak{A}_1 \sin \gamma_1 x \sin \omega_1 t$$

dont la fréquence est donnée par (109).

La seconde entraîne un mouvement propre :

$$(130) \quad y_2 = \mathfrak{A}_2 \sin \gamma_2 x \sin \omega_2 t$$

dont la fréquence est :

$$(131) \quad \omega_2 = \gamma_2^2 \sqrt{\frac{EIg}{p}}$$

Ces deux fréquences propres varient continuellement avec le temps du fait du déplacement de la charge qui modifie sans cesse γ_1 et γ_2 . Le mouvement résultant dépendra donc ici de quatre facteurs : les amplitudes $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ et les fréquences spatiales γ_1 et γ_2 .

On conçoit que le problème abordé de cette manière devienne vite inextricable.

Aussi en appellerons-nous, comme le conseille en pareil cas M. Yves ROCARD (1), à la méthode énergétique qui nous donnera directement la première des fréquences résultantes, toujours dominante en fait.

Comme il s'agit de grands ponts, où la durée du passage du train est bien plus grande que celle d'une oscillation, on peut supposer celui-ci immobile pendant une période de cette dernière et négliger même l'effet centrifuge qui est petit et en tout cas facile à rétablir.

Dans ces conditions, les mouvements des différents points du pont, ou de la poutre, conservent à sa ligne déformée une figure toujours semblable à elle-même et représentable par une expression de la forme :

$$(132) \quad y = f\varphi(x)$$

où f , déformation en un point fixe (flèche au milieu par exemple) est seule fonction du temps tandis que φ ne dépend que de x .

Or p et p' étant les poids au mètre de la charge permanente et de

(1) Dynamique générale des vibrations.

la surcharge sur un élément dx du pont, l'énergie cinétique totale de l'ouvrage chargé est :

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{p+p'}{g} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dx$$

tandis que son énergie élastique de flexion, pour un module E et une inertie de section I au point x , est :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

L'énergie totale du système est donc, d'après (132) différenciée par rapport à t , puis à x :

$$(133) \quad W_c + W_e = \frac{1}{2} f'^2 \int_0^l \frac{(p+p')}{g} \varphi^2 dx + \frac{1}{2} f^2 \int_0^l EI \varphi''^2 dx$$

où les intégrales sont des quantités fixes que nous désignerons, dans l'ordre, par a et b .

L'énergie totale devant rester constante, on a :

$$dW = a f' \cdot df' + b \cdot f df = 0.$$

Divisant par adt , on obtient l'équation différentielle de la flèche :

$$(134) \quad f'' + \frac{b}{a} f = 0.$$

C'est bien l'équation d'un mouvement oscillatoire dont le carré de la pulsation est, d'après ce qui précède :

$$(135) \quad \omega^2 = \frac{b}{a} = \frac{\int_0^l EI \varphi''^2 \cdot dx}{\int_0^l \frac{(p+p')}{a} \varphi^2 dx}.$$

L'oscillation fondamentale, ou premier résultant des divers mouvements oscillatoires propres que le système peut posséder, aura donc une période :

$$(136) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{b}}$$

dont le calcul peut être fait aisément par éléments successifs pour tous les cas possibles de surcharge.

Si, par exemple, nous reprenons le cas de la surcharge complète et uniforme du paragraphe II,5 avec :

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

on aura :

$$\begin{aligned}\varphi &= \sin \frac{\pi x}{l} \\ \varphi'' &= -\frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}\end{aligned}$$

donc :

$$(137) \quad a = 2\pi \frac{p+p'}{g}$$

$$(138) \quad b = \frac{2\pi^3 EI}{l^3}$$

et la pulsation fondamentale sera, d'après (135) :

$$(139) \quad \omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{p+p'}},$$

résultat identique à celui fourni par (109) quand on y fait $v = 0$ pour négliger l'effet centrifuge.

Si la surcharge n'occupait que la moitié du pont, la fonction φ et ses dérivés en seraient évidemment modifiées, mais ces changements ont bien moins d'influence sur les intégrales que la variation de p' qui s'annule sur une moitié de la portée.

En conservant donc l'expression ci-dessus de φ , l'intégrale b conservera sa valeur (138) et l'intégrale a deviendra :

$$(140) \quad a' = \frac{p+p'}{2g} \int_0^{\frac{l}{2}} \varphi^2 dx + \frac{p}{2g} \int_{\frac{l}{2}}^l \varphi^2 dx = \frac{\pi}{2g} (2p + p').$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{b}{a'} = \frac{4g\pi^3 EI}{(2p+p') l^3} \\ (141) \quad \omega &= \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{4EIg}{2p+p'}}.\end{aligned}$$

En comparant (141) à (139), on voit que, si $p' = p$ (cas fréquent dans les grands ponts), la pulsation fondamentale varie dans le rapport de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à $\frac{2}{\sqrt{3}}$, soit de 1 à 1,82, quand la surcharge franchit la seconde moitié de l'ouvrage. On conçoit donc qu'un effet de résonance ne puisse s'établir pendant le passage de la surcharge.

Mais les deux exemples simples que nous venons de donner ne sont

pas rigoureux parce qu'ils supposent une forme particulière de la fonction φ qui n'est qu'approchée. Aussi avons-nous établi pour l'application correcte de la formule (135), une méthode simple et rigoureuse, indépendante de l'expression analytique de la fonction φ et qui demande uniquement la construction préalable de la ligne moyenne déformée statique $y(x)$ de la poutre ou du pont, travail couramment exécuté dans les bureaux d'études.

Elle consiste à établir la longueur λ du pendule équivalent au pont chargé, longueur voisine de la flèche statique du pont et que nous appellerons pour cette raison sa « flèche pendulaire ».

II,9. Flèche pendulaire.

Reprenons les deux intégrales de (135). Comme :

$$y = f\varphi(x)$$

et que f est une constante dans ces intégrations, on a :

$$(142) \quad \frac{b}{a} = \frac{\int_0^l EI y''^2 dx}{\frac{1}{g} \int_0^l p y^2 dx}.$$

Or,

$$y'' = \frac{\mathcal{M}}{EI}$$

$\mathcal{M}$ étant le moment fléchissant au point x , et

$$y'' dx = d\alpha,$$

rotation élémentaire au même point.

Par suite, l'intégrale du numérateur exprime l'énergie totale de déformation de la poutre, soit

$$\int_0^l EI y''^2 dx = \int_0^l \mathcal{M} d\alpha.$$

Mais, en vertu du principe de conservation, cette énergie est égale au travail de la pesanteur déformant la poutre, c'est-à-dire à :

$$\int y p dx = \int y dP,$$

dP étant la charge élémentaire au point x .

On a donc maintenant :

$$(143) \quad \int_0^l \mathcal{M} d\alpha = \int_0^l y dP.$$

Quant à l'intégrale en dénominateur, elle s'écrit simplement :

$$(144) \quad \int_0^l y^2 dP.$$

Ainsi, le rapport (142) n'est autre que le quotient :

$$(145) \quad \frac{b}{a} = \frac{g \int_0^l y dP}{\int_0^l y^2 dP} = \frac{g}{\lambda}$$

qui définit la longueur λ du pendule équivalent au pont chargé, puisque, d'après (135) et (136), on aura :

$$\omega^2 = \frac{g}{\lambda}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}.$$

C'est la période de l'oscillation fondamentale du pont pour un cas de surcharge quelconque.

Le calcul de la flèche pendulaire λ est très simple dès que l'on a établi la ligne déformée statique $y(x)$ du pont (fig. 11), ce qui peut se faire avec précision par la méthode graphique au besoin.

En effet, l'intégrale (143) est alors le moment statique des charges dP de cette courbe par rapport à la ligne OO' des appuis et l'intégrale (144) est leur moment d'inertie par rapport à cette ligne.

L'expression (145) est tout à fait générale et on retrouve bien par elle les résultats déjà obtenus. En particulier, pour une charge isolée P appliquée en un point quelconque de la poutre, qu'elle déforme de y en ce point, on trouve bien

$$\frac{b}{a} = \frac{gPY}{PY^2} = \frac{g}{Y},$$

c'est-à-dire le résultat (35) du paragraphe I,3. La flèche pendulaire se confond alors avec la déformation Y au droit de la charge.

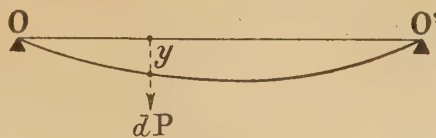


Fig. 11.

En dehors de ce cas limite, la longueur pendulaire d'un pont se rapproche toujours beaucoup de sa flèche statique au milieu f , et se confond même de nouveau avec elle dans le cas d'une charge sinusoïdale où l'on a exactement :

$$f = \frac{Pl^3}{\pi^2 EI} = \frac{g}{\omega^2}.$$

On trouvera dans le Cours de M. GRELOT (1) l'expression de la période d'oscillation d'un pont en fonction de sa flèche sous charge uniforme.

Nous en déduirons ici que, dans ce cas,

$$\lambda = 0,8f$$

de sorte qu'on pourra adopter dans la pratique la formule très simple :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,8f}{g}}$$

ou encore l'expression

$$T = 5,57 \sqrt{\frac{f}{g}}$$

de M. GRELOT.

II,10. Coefficients dynamiques.

Le coefficient dynamique des grands ouvrages a évidemment même forme que celui des petits, au facteur numérique près que modifie la répartition de la surcharge, laquelle est étendue sur le pont et non plus concentrée.

Il y a toujours deux effets distincts : celui de la force centrifuge et celui de l'oscillation. Le premier donne lieu à la majoration calculée au paragraphe II,3, comme suite au problème de BRESSE, et qui se résume dans la formule pratique

$$(147) \quad k = 1 + \frac{v^2}{12000h}$$

v étant la vitesse du train en mètres à la seconde, h la hauteur de la poutre. C'est le facteur par lequel il faut multiplier les ordonnées de la courbe de déformation statique pour obtenir la courbe déformée par le seul effet centrifuge.

(1) GRELOT. — École des Ponts et Chaussées. Cours de ponts métalliques. Année 1944-1945, p. 197.

A cela s'ajoute l'*amplitude* de l'oscillation que peut provoquer le passage de la charge mobile. Soit A cette amplitude et désignons par f la flèche instantanée produite au milieu du pont quand la tête du convoi est parvenue à l'abscisse $x = a$ (fig. 12).

Si f_1 est la valeur statique de f à l'instant t , on aura :

$$(148) \quad f = f_1 + A \sin(\omega t + \varphi)$$

avec $\varphi = 0$ moyennant un choix convenable de l'origine des temps.

Ceci indépendamment de l'effet centrifuge qui majore le tout de k .

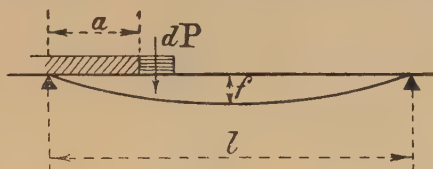


Fig. 12.

La pulsation ω se calcule aisément par la méthode de la flèche pendulaire exposée au paragraphe II,9, c'est-à-dire :

$$(149) \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}.$$

La dérivée au temps de (148) donne :

$$\frac{df}{dt} = \frac{df_1}{dt} + A \left(\omega + t \frac{d\omega}{dt} \right) \cos \omega t.$$

La durée d'une oscillation étant petite devant celle du passage du train, l'analyse ne portera que sur une durée très faible qui rend inactif le terme $t \frac{d\omega}{dt}$.

En faisant $t = 0$ à l'origine d'une oscillation, on aura :

$$(150) \quad \left(\frac{df}{dt} \right)_0 = \frac{df_1}{dt} + A \omega.$$

Étudions $\frac{df_1}{dt}$: lorsque la charge mobile, de densité p' , avance de vdt , tout se passe comme si l'on déposait en avant du train une charge concentrée

$$dP = p'vdt$$

qui ferait varier la flèche statique f_1 de :

$$df_1 = \eta p'vdt$$

η dépendant de a et de l .

Il s'ensuit que :

$$(151) \quad \frac{df_1}{dt} = \eta p' v.$$

Supposons alors, comme au paragraphe I,6, que la poutre se trouve en repos à cet instant précis. On posera :

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 = 0$$

et alors, compte tenu de (151) :

$$\eta p' v + \mathcal{A} \omega = 0$$

d'où

$$(152) \quad \mathcal{A} = -\frac{\eta p' v}{\omega}.$$

C'est là l'amplitude de l'oscillation qui naîtrait si la charge, trouvant la poutre en repos, se déplaçait brusquement sur elle à la vitesse v . Nous l'avons déjà appelée *l'amplitude normale*.

Ce cas correspond aux diagrammes « en escalier » fréquemment obtenus dans les essais de ponts et dont on trouvera un exemple à la figure 28.

La majoration dynamique d'oscillation est le rapport $\frac{\mathcal{A}}{f_1}$ de l'amplitude à la flèche statique maximum f_1 qui sera obtenue quand le train couvrira entièrement le pont et qui vaut

$$\max. f_1 = \frac{5p'l^3}{384 \cdot EI}.$$

Mais le facteur η varie lui-même pendant toute la durée du passage et il est maximum quand la tête du convoi passe au milieu du pont. On a alors :

$$\max. \eta = \frac{l^3}{48EI}.$$

Portant ceci dans (152), on trouve pour la majoration cherchée

$$\frac{\mathcal{A}}{f_1} = \frac{8}{5} \cdot \frac{v}{\omega l},$$

ou encore :

$$(153) \quad \frac{\mathcal{A}}{f_1} = \frac{8}{5} \cdot \frac{vT}{2\pi l},$$

T étant la période.

Les plus grandes oscillations sont donc celles engendrées quand la tête du train passe au milieu du pont. Mais, à l'amortissement près, toute oscillation née se conserve dans le temps. Quand la tête du train est aux extrémités du pont son passage n'engendre plus d'oscillations, parce qu'alors $\eta = 0$, mais les oscillations produites auparavant subsistent.

Pour retrouver la forme annoncée plus haut du coefficient dynamique, rappelons que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}},$$

avec

$$\lambda = \frac{l}{1000} \text{ env.}$$

Portant ces résultats dans (153), il vient en définitive, en prenant $g = 10$,

$$(154) \quad \frac{f_0}{f_1} = 0,016 \frac{v}{\sqrt{l}}.$$

C'est l'effet dynamique d'oscillation normale. Mais, nous l'avons dit page 25³², c'est là un cas moyen et la pratique nous montre souvent des amplitudes doubles de la normale. Il est donc sage de tabler sur la majoration relative $0,03 \frac{v}{\sqrt{l}}$, ce qui revient à prendre, pour les grands ponts, la moitié de la majoration (72 bis) proposée au paragraphe I,6, pour les petits ouvrages.

Le coefficient dynamique d'oscillation serait donc

$$(155) \quad 1 + \frac{0,032v}{\sqrt{l}}$$

et le coefficient dynamique total, comprenant l'effet centrifuge (147), deviendrait :

$$(156) \quad K = \left(1 + \frac{v^2}{12.000h}\right) \cdot \left(1 + \frac{0,03v}{\sqrt{l}}\right),$$

C'est-à-dire, en posant :

$$(157) \quad z = \frac{v}{10\sqrt{l}}$$

et

$$h = \frac{l}{15},$$

$$(158) \quad K = 1 + 0,32z + 0,12z^2 + 0,04z^3$$

avec possibilité de négliger le dernier terme.

Ces résultats confirment ceux du paragraphe I,6 mais avec des facteurs deux à trois fois moindres.

On doit ajouter à cela l'effet de progression calculé au paragraphe II,7. Si l'on compare le moment supplémentaire M (126) au moment

$$\mathfrak{M} = (p + p') \frac{l^3}{8}$$

dû aux charges en repos, on trouve

$$\frac{M}{\mathfrak{M}} = \frac{2}{g} f_1 \frac{v^2}{l} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \text{avec } \beta = \frac{v}{v_c}.$$

En négligeant β , prenant $g = 10$ et $f_1 = \frac{l}{1000}$, il vient, compte tenu de (157)

$$\frac{M}{\mathfrak{M}} = 0,02z^2.$$

On aurait alors, en comprenant ce dernier effet :

$$K = 1 + 0,32z + 0,14z^2 + 0,04z^3.$$

C'est la formule que nous proposerons pour les grands ponts avec la même réserve qu'au paragraphe I,7.

III. AMORTISSEMENT. — RÉSONANCE.

Nous avons, jusqu'ici, laissé de côté ces phénomènes qui appartiennent, pourrait-on dire, à la pathologie de l'oscillation. On sait que le frottement finit par amortir les oscillations des corps : c'est l'*amortissement*. Mais on sait aussi que des phénomènes de couplage ou des variations de masse peuvent, s'il en existe une source, accumuler de l'énergie dans le mouvement oscillatoire et amplifier celui-ci démesurément : c'est l'*auto-oscillation*. L'analogie mathématique avec le phénomène précédent, au signe près qui est inversé, a fait donner au terme responsable le nom de *résistance négative*. Il y a d'autres causes d'auto-oscillation dont le livre de M. Yves ROCARD (1) donne un large exposé.

Enfin, l'égalité de période entre l'oscillation naturelle d'un corps et

(1) Yves ROCARD. — Dynamique générale des vibrations, p. 188 à 234.

une oscillation forcée qui lui serait imposée entraîne également une accumulation d'énergie qui accroît continuellement l'amplitude. C'est la *résonance*.

La résonance se distingue de l'auto-oscillation comme l'addition se différencie de la multiplication, mais ces deux phénomènes sont également dangereux.

Tous ces phénomènes trouvent leur expression dans les solutions de l'équation (a), page 5, que nous rappellerons ici,

$$(160) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + G \frac{dy}{dt} + Fy = P(t),$$

et que nous appliquerons au cas particulier des ponts.

III,1. Amortissement.

Des causes diverses amènent l'extinction rapide des oscillations des ponts. On pourrait penser tout d'abord, pour les ponts métalliques, à des frottements entre les tôles et profilés assemblés par rivure; mais l'expérience a montré que les ponts soudés, qui ne peuvent être soupçonnés à cet égard, perdaient aussi vite leur mouvement oscillatoire. Il faut donc en conclure qu'il n'y a pas de mouvement relatif des pièces convenablement rivées.

Par contre, la voie ferrée, ordinairement attachée au pont par brides et boulons, donne évidemment lieu à des frottements dans lesquels le système dépense une partie de son énergie. Au surplus, la voie est reliée à celle des abords par des joints plus ou moins serrés ce qui apporte une résistance notable à la rotation du pont sur ses appuis.

Mais il y a une cause importante de déperdition de l'énergie qui semble être passée inaperçue : c'est le mouvement vibratoire communiqué par l'ouvrage oscillant à ses culées, puis au sol. Les oscillations du pont demandent à ses appuis des réactions périodiques mettant en jeu des déformations analogues des culées et du sol. L'analyse montre que ces déformations se propagent vers les couches profondes et ne reviennent plus, sinon en partie à l'occasion d'une réflexion sur une surface de discontinuité. Le phénomène n'est pas autre chose que le *rayonnement acoustique* dont nous avons déjà signalé l'importance dans le problème du battage des pieux.

Nous sommes ici en présence d'une perte par cette cause que les

spécialistes de l'électromagnétisme et de l'acoustique ont appelé *résistance de rayonnement* (1).

Une analyse élémentaire donnera une idée de ce genre de perte. Considérons (fig. 13) une barre prismatique de section S , indéfinie d'un seul côté à partir d'une extrémité A qu'une masse M animée de la vitesse v va frapper.

Dès le début de l'impact, les tranches au contact des deux corps prennent des vitesses en rapport inverse des densités respectives de ces corps. Mais si nous supposons la masse M très concentrée, elle communiquera entièrement, à cet instant initial, sa vitesse v à la première tranche infinitésimale, de masse dm , de la barre. L'impulsion donnée à celle-ci sera :

$$dQ = v dm.$$

Or, l'équation des cordes vibrantes nous apprend que l'onde de choc

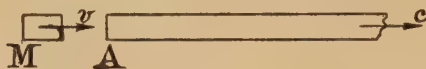


Fig. 13.

se propage dans la barre avec la célérité c du son, de sorte que la masse intéressée dm croît avec le temps et que l'on a :

$$dm = \rho S c dt,$$

ρ étant la densité de la barre.

L'effort développé par le choc au point A est donc, à l'origine des temps,

$$F = \frac{dQ}{dt} = \rho S c v.$$

La puissance rayonnée est

$$\mathcal{P} = Fv = \rho S c v^2.$$

Ceci est vrai, d'ailleurs, à tout instant, mais la vitesse v varie continuellement suivant la réserve d'énergie de la masse incidente M . On

(1) Yves ROCARD. — Dynamique générale des vibrations, p. 35.
Adrien FOCH. — Acoustique, p. 38.

établirait facilement que, dans notre hypothèse, cette vitesse au point A ($x = 0$) varie selon l'expression

$$v = v_0 e^{-\alpha t},$$

la constante de temps valant :

$$(161) \quad \alpha = \frac{\rho S c}{M}.$$

Ainsi s'amortit le choc de la masse M sur la barre par l'écoulement ou le « rayonnement » dans celle-ci d'une énergie acoustique qui pourra se perdre dans le sol si la barre y est fichée.

Tel est bien le cas de nos culées de ponts avec cette différence que la masse incidente M est remplacée par une masse oscillante qui reste au contact de la maçonnerie du fait de l'élasticité de cette dernière.

Soit donc M la masse totale du pont chargé dont le poids se reporte également sur quatre appuis. Nous supposons cette masse concentrée au milieu du pont où elle oscille avec une amplitude a et une fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. Dans ces conditions, le pont exercera sur chacun de ses appuis une force d'inertie :

$$(162) \quad F = \frac{1}{4} M \omega^2 a \sin \omega t.$$

Remplaçons, pour simplifier, la culée par une pile en maçonnerie de section constante S pour pouvoir l'assimiler à la barre du cas précédent. On pourra écrire, ρ étant la densité de la maçonnerie et c la célérité du son dans cette matière,

$$(163) \quad F = \rho S c v$$

v étant la vitesse périodique d'impact sur les sabots d'appui. Cette vitesse s'obtient immédiatement en égalant (162) et (163). On trouve :

$$(164) \quad v = \frac{M \omega^2 a}{4 \rho S c} \sin \omega t.$$

L'énergie emportée par l'onde élastique dans le temps dt est donc, d'après (162) et (164), $dW = 4Fvdt = -\frac{M^2 \omega^4 a^2}{4 \rho S c} \sin^2 \omega t dt$

soit une perte totale, par période :

$$(165) \quad \Delta W = \int_0^{2\pi} 4Fvdt = -\frac{\pi M^2 \omega^4 a^2}{4 \rho S c}.$$

Si l'on compare cette perte à l'énergie d'oscillation du pont,

$$(166) \quad W = \frac{1}{2} M y_0'^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 a^2,$$

il vient :

$$(167) \quad \frac{\Delta W}{W} = -\frac{\pi M \omega}{2 \rho S c}.$$

Ce rapport donne immédiatement la variation relative de l'amplitude d'oscillation puisque, à la fin de chaque période où l'énergie se réduit à la forme élastique (car $y' = 0$), on a :

$$W = \frac{1}{2} k y^2$$

et que, par conséquent,

$$\Delta W = k y \Delta y \quad \text{sensiblement.}$$

Par suite

$$(168) \quad \frac{\Delta W}{W} = \frac{2 \Delta y}{y}.$$

En comparant (167) et (168), on en déduit

$$(169) \quad \frac{\Delta y}{y} = -\frac{\pi M \omega}{4 \rho S c} = -\frac{\pi^2 \nu P}{2 \rho g S c}$$

P étant le poids total du pont, ρg le poids spécifique de la maçonnerie dont la section totale est $4S$.

Ainsi se trouve rattaché l'amortissement de l'oscillation à la perte par rayonnement acoustique des appuis.

Cherchons l'ordre de grandeur : le pont pourrait être appuyé sur deux piles en béton de chacune 20 m^2 de section pour deux appuis de sorte que

$$4S = 40 \text{ m}^2.$$

Le poids spécifique du béton est :

$$\rho g = 2.500 \text{ kg/m}^3$$

et la célérité du son y est $c = 3.000 \text{ m/s}$. Avec une fréquence ν de 5 périodes par seconde on a :

$$\frac{\pi^2 \nu}{2 \rho g S c} = 3,3 \times 10^{-7}.$$

Dès lors, P étant le poids du pont en tonnes, on aura :

$$\frac{\Delta y}{y} = 3,3 \times 10^{-4} P.$$

Un pont de 300 t donnerait donc un décrement

$$\frac{\Delta y}{y} = 0,10.$$

Chaque oscillation verrait ainsi baisser l'amplitude de 10 p. 100. Ceci fait tomber l'amplitude à 8 p. 100 de sa valeur initiale après vingt oscillations ce qui est bien de l'ordre des observations.

Étudions le mouvement oscillatoire du pont : sa masse totale M , surcharge comprise, étant toujours supposée au centre et animée du mouvement vertical $y(t)$ [fig. 14], notons que le mouvement élastique

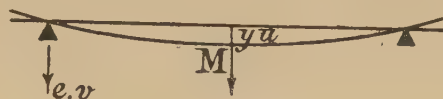


Fig. 14.

des appuis sur la maçonnerie apporte un mouvement d'entraînement vertical de l'axe du pont, dont la vitesse v est, d'après (164), en phase avec l'accélération y'' de M ; elle est donc en quadrature avec la vitesse y' de cette masse, de sorte que les appuis sont fixes quand la poutre passe par la forme rectiligne et que la vitesse d'impact v des appuis est maximum en même temps que la flèche du pont.

Par suite de la composition des deux mouvements, la déformation de la poutre, pour un déplacement y de la masse, n'est plus que $(y-e)$ [fig. 15], e étant l'enfoncement élastique des appuis dans la maçonnerie, c'est-à-dire, en partant de la forme rectiligne :

(169 bis) $e = \int v dt.$

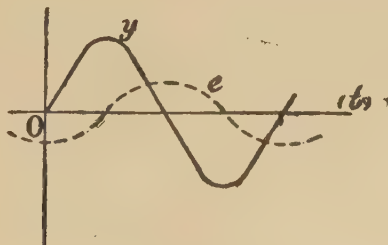


Fig. 15.

L'équation du mouvement libre de la masse est alors :

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + k(y - e) = 0.$$

Substituons à e sa valeur (169 bis) et différencions, il vient :

$$(170) \quad M \frac{d^3 y}{dt^3} + k \left(\frac{dy}{dt} - v \right) = 0.$$

Or, la vitesse d'impact est liée à l'accélération par la condition dynamique

$$4\rho S c v = -M \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Portant ceci dans (170), on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$M \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{kM}{4\rho S c} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{kdy}{dt} = 0$$

que nous écrivons :

$$(171) \quad u'' + 2hu' + \omega_0^2 u = 0$$

en posant :

$$u = \frac{dy}{dt}$$

$$(172) \quad 2h = \frac{k}{4\rho S c}.$$

$$(173) \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M}.$$

$$(174) \quad \omega^2 = (\omega_0^2 - h^2)$$

d'où la pseudo-période

$$(175) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}.$$

La fonction

$$(176) \quad u = u_0 e^{-ht} \cos \omega t,$$

qui représente la vitesse du mouvement oscillatoire de M au temps t , si elle est u_0 à l'origine des temps, satisfait à l'équation (171).

On repasse de la vitesse à l'élongation en intégrant, ce qui donne, au signe près que nous prendrons positif :

$$y = \frac{ae^{-ht}}{\sqrt{\omega^2 + h^2}} \cos(\omega t + \theta)$$

avec

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega}{h}$$

a étant l'amplitude. L'amplitude de la $n^{\text{ième}}$ période sera :

$$a_n = \frac{a_0 e^{-nhT}}{\sqrt{\omega^2 + h^2}}$$

avec

$$\begin{cases} n = 0, 1, 2, \dots \\ T = \text{période.} \end{cases}$$

On voit que l'amplitude décroît sans cesse et que le rapport de deux amplitudes successives est constamment égal à

$$e^{-hT}.$$

Ceci confirme le résultat obtenu au début de ce paragraphe car la décroissance relative :

$$(177) \quad \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} = 1 - e^{-hT} = hT - \frac{h^2 T^2}{2!} + \frac{h^3 T^3}{3!} - \dots$$

se réduit, aux faibles valeurs de hT , à :

$$(178) \quad \frac{\Delta a}{a} = hT = \frac{kT}{8\rho Sc}.$$

Mais d'après (173) et en substituant $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ceci s'écrit :

$$(179) \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{\pi M \omega_0^2}{4\rho Sc \omega}$$

résultat identique à (169) quand on peut confondre ω et ω_0 ce qui est bien le cas dans les ponts où $\frac{h}{\omega_0}$ est de l'ordre de 1/60. La constante de temps h vaut, en effet, 0,30 environ.

Une autre conséquence de l'amortissement est de réduire la fréquence du mouvement oscillatoire. On voit, en effet, par (174) que la pulsation ω est toujours plus petite que la pulsation ω_0 . Si l'amortissement croissait au point que h dépassât ω_0 , le mouvement cesserait d'être oscillatoire et s'éteindrait de façon *apériodique*.

Ainsi, nous concluons que les oscillations des ponts, comme tous les mouvements de cette nature, sont amorties avec une constante de temps qui dépend de la raideur des poutres et de la nature des massifs d'appui.

La cause principale en est le rayonnement acoustique des sabots du pont dans la masse des culées et du sol. Ce rayonnement, d'une fréquence de 3 à 5 périodes par seconde, n'est pas audible mais on le ressent nettement au contact du sol quand on stationne sous un pont au passage d'un train. Les ondes sonores qui l'accompagnent, trans-

mises par l'air, proviennent des mouvements vibratoires à plus grande fréquence qui s'établissent dans les pièces des tabliers métalliques par réflexion des ondes acoustiques aux abouts de ces pièces.

L'examen de (178) montre que les oscillations d'un pont s'éteindront plus vite si le pont est plus raide et s'il est appuyé sur une substance moins dense et moins élastique car $\rho c = \sqrt{E\rho}$. Ainsi, un pont provisoire appuyé sur le sol par des camarteaux s'amortira plus vite qu'un pont définitif sur ses maçonneries.

Nous dirons maintenant quelques mots des ponts en béton armé dans lesquels l'amortissement n'est pas seulement dû au rayonnement acoustique des appuis, mais aussi à la structure même du pont, dont la matière constituante n'est qu'imparfaitement élastique, du moins dans les premiers mois de la prise du béton.

Les diagrammes relevés ne présentent alors que peu ou pas d'oscillations (fig. 16) et accusent une flèche rémanente ne disparaissant que

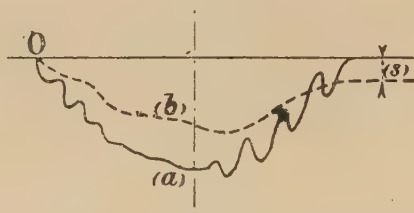


Fig. 16. — (a) diagramme de flexion d'un pont métallique;
(b) diagramme de flexion d'un pont en béton; (s) flèche rémanente d'un pont en béton.

plusieurs secondes après le passage du train. Quand, cependant, des oscillations apparaissent, elles présentent une période notablement supérieure à celle d'un pont non amorti. C'est la pseudo-période donnée par la formule (175) du paragraphe III,1.

Ce sont là les conséquences d'un amortissement considérable qu'on peut évaluer avec les formules précédentes.

En effet, la relation (174) permet de calculer la constante h quand on connaît la fréquence observée ω et la fréquence propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\lambda}},$$

λ étant la flèche pendulaire (II,9).

L'expérience donne pour ce genre d'ouvrage :

$$\omega_0 = (2 \text{ à } 3) \times \omega.$$

Si l'on observe, par exemple, $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, on aura :

$$h^2 = \omega_0^2 - \omega^2 = \frac{3}{4} \omega_0^2.$$

La pseudo-période étant

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

on aura

$$hT = 2\pi\sqrt{3} \approx 11$$

et la formule (175 bis) donnera pour la décroissance relative de l'amplitude :

$$\frac{\Delta a}{a} = 1 - e^{-ht} = 1 - \frac{1}{6.10^4}.$$

L'oscillation doit donc s'éteindre dès la première période. C'est pourquoi les ponts en béton armé dont la prise est insuffisante oscillent très peu. C'est là un signe caractéristique auquel on doit prêter attention car un tel amortissement ne va pas sans une altération interne du béton qui peut nuire à la bonne tenue ultérieure de l'ouvrage. L'expérience nous permet de dire que la durée de prise réglementaire de 90 jours est à peine suffisante pour permettre la mise en service d'un pont-rail en béton armé.

III,2. Résonance.

Avant de donner l'analyse classique de la résonance, nous ferons une étude mécanique élémentaire de ce phénomène.

Considérons un système oscillant autour d'un point O avec une amplitude a .

Portons en ordonnées les forces F et en abscisses les déplacements y (fig. 17).

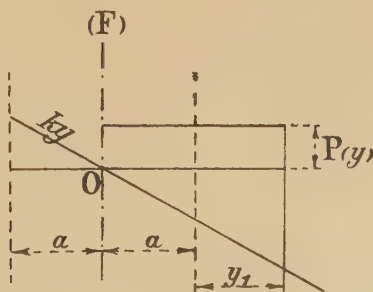


Fig. 17.

Une force de rappel $F = -ky$ ramène sans cesse la masse vers le point 0 après l'élongation a . Dans une demi-période, le travail de la force F , de $-a$ à $+a$, est évidemment nul.

Mais si, à partir du passage en 0, vers les y positifs, on applique chaque fois une force auxiliaire P constante qui n'agira pas au retour, alors le travail de cette force au bout de l'amplitude a laissera au système un surcroît de force vive qui le conduira au delà de a malgré la force de rappel croissante $-ky$.

Le système s'arrêtera après une élongation $(a + y_1)$, facile à calculer. En effet, le travail de la force P ,

$$P(a + y_1),$$

est alors absorbé par le surcroît de travail résistant de F qui est

$$\frac{1}{2} k [(a + y_1)^2 - a^2]$$

de sorte qu'on a :

$$\frac{1}{2} k [(a + y_1)^2 - a^2] - P(a + y_1) = 0$$

c'est-à-dire

$$(a + y_1)^2 - \frac{2P}{k}(a + y_1) - a^2 = 0$$

d'où

$$(a + y_1) = \frac{P}{k} + \sqrt{\frac{P^2}{k^2} + a^2}$$

le radical négatif n'ayant pas de sens ici.

Mais $\frac{P}{k} = f$ n'est autre que la flèche statique sous la force P . On a donc, en désignant par a_n la $n^{\text{ième}}$ amplitude,

$$a_n = f + \sqrt{f^2 + a_{n-1}^2}$$

ce qui permet de calculer par récurrence toutes les amplitudes successives.

En particulier, si $a_{n-1} = 0$ (la poutre en repos étant chargée instantanément de P), on a

$$a_1 = 2f$$

résultat bien connu et déjà rencontré.

On calculera facilement qu'à partir de $a_0 = 0$, les amplitudes suc-

cessives obtenues en appliquant la force P pendant le seul quart de période descendant sont :

$$a_0 = 0.$$

$$a_1 = 2f.$$

$$a_2 = 3,23f.$$

$$a_3 = 4,28f.$$

$$a_4 = 5,50f.$$

La croissance est continue mais de moins en moins rapide et elle devient minimum quand a est grand devant f . A ce moment, on peut développer en série $\sqrt{a^2 + f^2}$ ce qui donne la formule approchée :

$$a_{n+1} = f + a_n \left(1 + \frac{1}{2} \frac{f^2}{a_n^2} - \dots \right)$$

et le phénomène se réduit alors à une simple addition des flèches partielles égales f jusqu'à rupture de la pièce porteuse. C'est là l'effet si dangereux de la résonance.

Nous aurions pu raisonner aussi sur le cas d'une force sinusoïdale, mais le calcul différentiel nous en dira davantage.

Reprenons notre masse oscillante M rappelée par une force élastique — ky mais soumise aussi à une force périodique $F \sin \gamma t$ et à l'amortissement de décrément h . L'équation du mouvement sera :

$$(180) \quad M \frac{d^2 y}{dt^2} + 2Mh \frac{dy}{dt} + ky = F \sin \gamma t.$$

Prise sans second membre, cette équation admet la solution (176) du paragraphe précédent qui définit le mouvement propre du système

$$(181) \quad y = ae^{-ht} \sin (\omega t + \varphi)$$

avec :

$$\omega^2 = \frac{k}{M} - h^2$$

φ étant un déphasage constant lié aux conditions initiales.

Mais la force périodique du second membre impose au système un *mouvement forcé* de la forme :

$$(182) \quad y_1 = \mathfrak{A} \sin (\gamma t + \psi)$$

qui répond bien à l'équation (180) sous les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \gamma^2) \sin \psi + 2h\gamma \cos \psi &= 0 \\ \mathfrak{A} [(\omega_0^2 - \gamma^2) \cos \psi - 2h\gamma \sin \psi] &= \frac{F}{M} = j \\ \text{avec } \omega_0^2 &= \frac{k}{M}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(183) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= -\frac{2h\gamma}{\omega_0^2 - \gamma^2} \\ \mathfrak{A} &= \frac{j \cos \psi}{\omega_0^2 - \gamma^2} = \frac{j}{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4h^2\gamma^2}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2}}} \end{aligned}$$

ou

$$(184) \quad \mathfrak{A} = \frac{j}{\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4h^2\gamma^2}}.$$

Ainsi, le système est entraîné par la force $Mj \sin \gamma t$ avec un déphasage ψ donné par (183) et l'amplitude de son mouvement oscillatoire doit prendre la valeur bien déterminée $\mathfrak{A}$ indispensable à l'équilibre des forces. Ceci distingue le mouvement forcé du mouvement propre (181) dont l'amplitude, indéterminée par l'équilibre, dépend de conditions initiales arbitraires.

L'examen de l'expression (184) conduit immédiatement à cette remarque que, s'il n'y avait pas d'amortissement ($h = 0$), l'amplitude $\mathfrak{A}$ devrait prendre une valeur infinie pour $\gamma = \omega_0$. C'est ainsi que se décèle par l'analyse le phénomène de résonance.

En fait, l'équation (184) ne donne que la valeur de $\mathfrak{A}$ correspondant à un équilibre final. Cette amplitude ne peut évidemment être obtenue à partir de zéro qu'après une *période transitoire* pendant laquelle le milieu extérieur, par le travail de la force F , apporte progressivement l'énergie nécessaire. C'est d'ailleurs à cette période que se rapporte le mécanisme que nous avons exposé plus haut.

Grâce au facteur d'amortissement h , l'amplitude $\mathfrak{A}$ est tout de même limitée à la valeur maximum :

$$(185) \quad \lim. \mathfrak{A} = \frac{j}{2h\gamma}$$

et comme, par l'étude faite au paragraphe précédent, nous connaissons une limite inférieure de h donnée par le rayonnement acoustique des appuis, nous sommes en mesure de connaître la valeur maximum de l'amplitude qui sera donnée, à la résonance, par une force alternative d'amplitude $F = Mj$.

Pour appliquer ceci aux ponts de chemins de fer, on observera que les forces périodiques qu'ils supportent sont dûes à l'inertie des contre-poids tournants des machines et aux chocs des roues sur les joints de rails.

Mais, nous l'avons dit, le déplacement des machines et l'engagement progressif du train sur le pont changent assez la période propre de

celui-ci pour que la résonance ne puisse s'établir. Seul subsiste le danger possible du martèlement d'un joint de rails par un long train à essieux équidistants.

Pour grossière que soit l'assimilation de ces chocs à une force sinusoïdale simple, on peut cependant obtenir une évaluation sommaire de la limite d'amplitude en prenant pour valeur de l'amplitude d'accélération j de (185) celle qui correspond au mouvement oscillatoire (86) donné au paragraphe I,9 comme résultant du choc d'un essieu sur un joint. La formule (88) dudit paragraphe donne l'amplitude α que nous appellerons ici α_0 , de ce mouvement en fonction de la vitesse du train, du diamètre de ses roues et de l'ouverture du joint choqué. Si v est la pulsation propre du système, l'accélération sera

$$j = \alpha_0 v^2.$$

Alors, (185) donnera :

$$(186) \quad \lim. \alpha = \frac{\alpha_0 v^2}{2h\gamma}$$

limite de l'amplitude finale α en fonction de l'amplitude élémentaire α_0 de chaque impulsion.

Nous pouvons maintenant tenter une évaluation :

Soit un pont de 30 m de longueur, pesant 150 t et portant un train de 250 t donc, en tout, 400 t. Sa pulsation sera, environ

$$v = \frac{100}{\sqrt{l}} = 18$$

et on aura par conséquent, pour $h = 0,30$,

$$(187) \quad \frac{v^2}{2h} = 540.$$

L'amplitude élémentaire α_0 se calculera par la formule (88) du paragraphe I,9 où l'on aura pour le choc d'un essieu de 20 t sur le pont de 400 t, le rapport de masses $\frac{M_0}{M_1} = 20$. Cette formule conduira donc, dans l'hypothèse d'un joint de 1 cm d'ouverture et d'une roue de 1 m de diamètre, à l'amplitude élémentaire :

$$\alpha_0 = \frac{0,01 \times v}{21 \times 18} \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \times 20} \sim \frac{v}{25000}$$

v étant la vitesse de passage.

Quant à la pulsation γ , elle est également proportionnelle à cette vitesse de passage et vaut, pour un écartement σ des essieux,

$$\gamma = 2\pi \frac{v}{\sigma}.$$

Il s'ensuit que

$$(188) \quad \frac{\mathfrak{A}_0}{\gamma} = \frac{\sigma}{2\pi \times 25000} = 6,35 \times 10^{-6} \sigma$$

est indépendant de la vitesse du train et augmente avec l'écartement σ des essieux.

Les valeurs (187) et (188) portées dans (186) nous donnent maintenant pour limite de l'amplitude fournie par la résonance :

$$\lim, \mathfrak{A} = 3,43 \times 10^{-6} \sigma.$$

Pour un écartement de $\sigma = 10$ m entre essieux, on pourra donc avoir dans le cas actuel :

$$\lim, \mathfrak{A} = 35 \text{ mm.}$$

C'est encore, comme dans l'exemple du paragraphe I,9, une surflèche du même ordre que la flèche elle-même (ici 30 à 40 mm). C'est dire que la résonance peut tout au plus, dans les conditions habituelles d'amortissement, doubler l'effet des charges statiques. Ceci suppose d'ailleurs que cet état se maintient assez longtemps pour permettre l'accumulation des impulsions successives, ce dont les chiffres donnés au début de ce paragraphe donnent une idée. Pareille condition implique, à vitesse constante, une parfaite équidistance des essieux du train ce qui n'est, pratiquement, jamais réalisé.

Aussi peut-on se demander si l'on doit tenir compte de cet effet exceptionnel dans l'établissement des ponts. Nous ne le pensons pas car les limites de fatigue actuellement imposées, tous autres effets dynamiques compris, sont au plus égales à la moitié de la limite d'élasticité du matériau. Si cette dernière était atteinte ou légèrement dépassée, il n'en résulterait qu'une faible déformation permanente et un peu d'écrouissage sans autre inconvénient. Le point de vue opposé conduirait à de grosses dépenses sans grande utilité au regard de la rareté du phénomène.

Néanmoins, il faudrait s'occuper de savoir, dans l'étude des grands ouvrages, si certaines compositions de trains bien homogènes, du type « express », ne pourraient amener ce phénomène, auquel cas on devrait interdire à ces trains les vitesses critiques de résonance.

IV. APPAREILS DE MESURE. — ESSAIS.

IV,1. Les fleximètres.

De tout temps, on a mesuré la flèche des ponts pour contrôler leur fatigue sous des charges données. Nous avons montré, en effet, dans les chapitres précédents, comment la flèche se trouve reliée à cette fatigue et au rapport $\theta = \frac{h}{l}$ de la hauteur des poutres à leur portée.

Rappelons que, pour une poutre simplement posée sur deux appuis, et portant une charge uniforme de p kg par mètre, la flèche est :

$$(189) \quad f = \frac{5}{384} \cdot \frac{p l^4}{EI},$$

I étant son moment d'inertie. D'autre part, son taux de fatigue N est lié au moment fléchissant par la relation

$$(190) \quad N = \frac{384}{2I} = \frac{p l^2 h}{16I}.$$

Eliminant p , entre (189) et (190) il vient :

$$f = \frac{5}{24} \cdot \frac{N l^2}{E h}.$$

La flexibilité métrique de la poutre est donc :

$$\frac{f}{l} = \frac{5}{24} \cdot \frac{N}{E \theta}.$$

On reconnaît qu'elle augmente avec le taux de fatigue et qu'elle décroît quand le rapport $\theta = \frac{h}{l}$ augmente. La distribution de la charge et le mode d'appui n'influent que sur le facteur numérique qu'on peut calculer dans chaque cas.

Les règlements officiels imposent seulement une limite à la fatigue N qui est actuellement, pour l'acier, de 13 kg/mm². Mais nous avons vu que la flèche fait croître avec elle la période des oscillations de la poutre et, par là même, l'amplitude de ces mouvements. Il y a donc intérêt à respecter un rapport θ convenable.

La pratique a depuis longtemps fixé le champ

$$\frac{1}{10} > \theta > \frac{1}{25}$$

la bonne règle étant $\frac{1}{12}$ à $\frac{1}{15}$ pour la poutre simplement posée.

En supposant $\theta = \frac{1}{15}$ et prenant $\frac{N}{E} = \frac{1}{2000}$, on trouve pour la flexibilité des ponts métalliques :

$$\frac{f}{l} = 1,5 \times 10^{-3}$$

soit 1,5 mm par mètre de portée.

Ainsi, la flèche des ponts métalliques atteint rapidement l'ordre du centimètre ce qui permet sa mesure directe au moyen d'appareils rudimentaires.

Le plus simple est l'appareil « Bosramier » (fig. 18), constitué

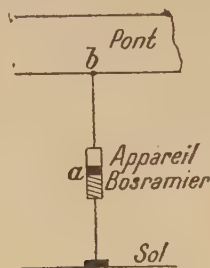


Fig. 18.

uniquement de deux tubes concentriques reliés par fils d'acier, l'un au sol et l'autre au pont. Un ressort placé entre les tubes assure la tension des fils. Cet appareil est toujours employé dans les essais de pont.

Mais on a évidemment intérêt à amplifier les mouvements et à les enregistrer, ce qui permet, notamment, d'analyser les oscillations. C'est ce que réalise l'appareil « Richard-Rabut » (fig. 19), où un levier, de

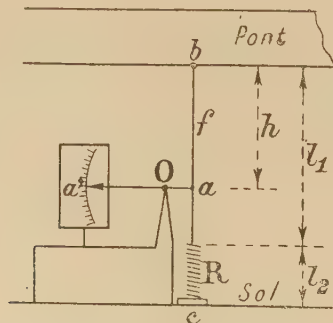


Fig. 19.

centre fixe 0, s'attache en a sur un fil d'acier de longueur l_1 tendu par un ressort R de longueur l_2 fixé au sol en c . Les mouvements du point b du pont, transmis en a par le fil tendu, sont reproduits en a' , amplifiés et enregistrés, sur un cylindre tournant. Les diagrammes exposés ci-après ont été obtenus de cette façon.

Cet appareil est couramment employé au Service des Ponts et Chaussées et à la S. N. C. F. C'est celui que nous utilisons pour nos recherches.

On a cependant tenté de faire mieux en réalisant des appareils ne présentant pas d'inertie propre.

Aux essais internationaux de 1930, dont nous avons parlé, des appareils à transmission électrique ont été présentés par l'Angleterre et la Suisse, puis, tout récemment, la Division Centrale des Ouvrages d'Art de la S. N. C. F. a mis au point un appareil à transmission optique donnant, utilisé la nuit, un enregistrement photographique très convenable.

A notre avis, la difficulté n'est pas d'obtenir de bons diagrammes, mais plutôt de les interpréter. Une théorie-guide est indispensable pour permettre de retrouver dans un diagramme toutes les particularités du mouvement, de distinguer, par exemple, l'oscillation propre de l'appareil des partiels du mouvement du pont.

Quant au mouvement oscillatoire fondamental de l'ouvrage, il se distingue toujours facilement. Il est d'ailleurs aisément calculable et se trouve assez éloigné des mouvements propres de l'appareil de mesure pour qu'aucune confusion ne soit à craindre. Toutefois, la période d'oscillation des ponts étant voisine du quart de seconde, une résonance pourrait s'établir entre l'un des partiels de ce mouvement et une oscillation propre de l'appareil de mesure : on enregistrerait alors des pointes sans rapport avec le mouvement réel du pont. Ce cas pourrait se produire avec notre appareil Richard-Rabut dont le ressort présente une période propre de $1/16$ de seconde, mais il serait facile de retrouver ce phénomène par le calcul. En fait, nous n'avons pas rencontré ce cas qui reste exceptionnel.

L'essentiel pour l'Ingénieur est de mesurer la flèche du pont, son accroissement par l'effet centrifuge et son oscillation fondamentale dont la période peut, par le contrôle du calcul, donner de précieux renseignements comme nous l'avons montré à propos des ponts en béton armé. A tout ceci se prête parfaitement l'appareil classique que nous venons de décrire.

Une question se pose encore sur l'erreur que peuvent introduire dans les mesures la longueur et la tension du fil. L'équipage fil/ressort est équivalent à un système de deux barres élastiques, de raideurs respectives k_1 et k_2 et travaillant en série sous une même force de traction F .

L'allongement γ qu'il faut donner au système fixé en c , pour l'accrocher au pont en b engendre cette force qui lui est liée par l'équation.

$$F = \gamma \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Or, le déplacement du point a où s'attache le levier enregistreur diffère de celui du point b par la déformation du tronçon ab (de longueur h) du fil. Il vaut :

$$\gamma_a = \gamma - \frac{Fh}{k_1 l_1}.$$

Substituant à F sa valeur ci-dessus, on trouve :

$$(191) \quad \gamma_a = \gamma \left[1 - \frac{k_2 h}{k_1 + k_2} \right].$$

Ainsi, l'erreur commise, représentée par le second terme entre crochets, est indépendante de la traction F et diminue quand on assouplit le ressort. Le ressort employé présente une raideur

$$k_2 = 700 \text{ kg/m.}$$

et le fil d'acier, de 1,5 mm de diamètre, présente sous 4 m de longueur, une raideur

$$k_1 = 8.100 \text{ kg/m.}$$

On vérifiera facilement alors que l'erreur commise, toujours par défaut, atteindra $0,08 \frac{h}{l_1}$ soit près de 8 %. Mais il est facile d'en tenir compte.

Certes, on pourrait assouplir le ressort; mais on augmenterait ainsi sa période propre d'oscillation qui pourrait alors se confondre avec celle du pont, ce qui deviendrait gênant.

IV,2. Les tensomètres.

On désigne ainsi des appareils permettant la mesure des tensions dans les poutres ou éléments divers des ponts. En fait, ils mesurent seulement la déformation locale x sur une base de longueur $l = 10$ à 20 cm. On en déduit la déformation unitaire $\epsilon = \frac{x}{l}$ et, par la loi de HOOKE, la tension ou fatigue élastique :

$$N = E\epsilon.$$

La déformation α étant, sur une base aussi courte, nécessairement très faible (1/20 de mm par m et par kg), une grande multiplication est nécessaire pour la rendre observable. Ceci est obtenu par un jeu de leviers et d'engrenages dont le dernier actionne l'aiguille indicatrice. C'est, en somme, le principe du « comparateur » utilisé en mécanique de précision.

Le premier appareil de ce genre fut construit, autrefois, par l'Ingénieur en chef DUPUY, du Corps des Ponts et Chaussées. Il fut perfectionné ensuite par MANET puis par l'Inspecteur Général RABUT à qui l'on doit l'appareil actuellement employé dans les essais de ponts.

Le tensomètre Manet-Rabut, dont la figure 20 donne le schéma de principe, se compose d'un système de leviers et d'engrenages mû par un poussoir P attaché en B à la barre dont on veut mesurer la déformation. Le corps de l'appareil, dont l'axe de l'aiguille est solidaire, est fixé en A à la même barre. Un ressort rappelle l'équipage quand la déformation cesse. Le déplacement relatif des points A et B, qui constitue cette déformation, est ainsi amplifié et mesuré.

Cet appareil donne de bonnes indications jusqu'à 25 kg/mm², ce qui dépasse le travail normal des pont et suffit donc pour la pratique. Mais on ne peut l'utiliser sous des passages de trains rapides car, dans les oscillations consécutives, le poussoir projette l'aiguille avec son équipage et fausse ainsi ses indications. Par contre, les tensions produites sous des passages à vitesse modérée sont convenablement mesurées.

On a évidemment pensé à la mesure par des procédés électriques ou optiques, mais les Administrations ne s'étaient pas, jusqu'ici, orientées vers les mesures de précision dont l'intérêt était discutable devant l'ampleur de la marge de sécurité imposée par les règlements.

La S.N.C.F. vient cependant d'acquérir un dispositif américain consistant en des résistances ohmiques étalonnées que l'on pose sur le point à ausculter de la poutre et qui, reliées à un pont de Wheatstone, accu-

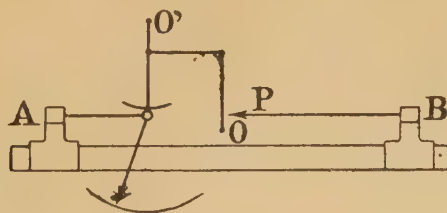


Fig. 20.

sent les déformations qu'elles épousent et dont l'effet électrique est amplifié par un poste à lampes électroniques.

Il n'est pas certain, cependant, que ces petites résistances puissent suivre fidèlement les déformations oscillantes à grande fréquence et nous pensons, à cet égard, que de petits condensateurs à armatures pincées entre deux points très voisins de la poutre donneraient de meilleures indications.

IV,3. Essais.

Nous avons mentionné, au cours des divers paragraphes, les essais auxquels les chemins de fer ont procédé dans les différents pays pour mettre en évidence les effets dynamiques dans les ponts. Nous avons rappelé notamment les essais effectués à Douai en 1930 sous la direction de M. CAMBOURNAC et au cours desquels on a cherché à réaliser les circonstances du problème de STOKES en utilisant un wagon à essieu central de 30 t constituant la charge concentrée mobile envisagée. Ce wagon, lancé sur un pont de 10 m de portée, lui a communiqué des oscillations de grande amplitude dont les enregistrements, pour six vitesses différentes, sont reproduits sur les figures 21 à 26.

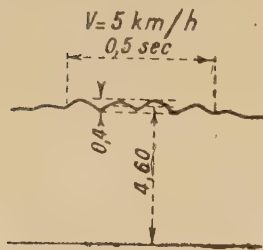


Fig. 21

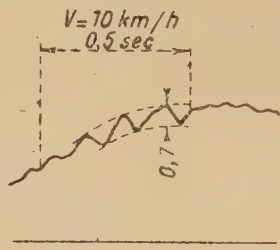


Fig. 22.

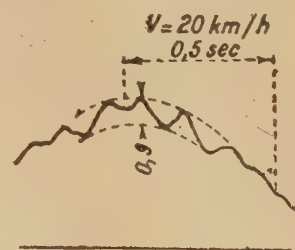


Fig. 23.

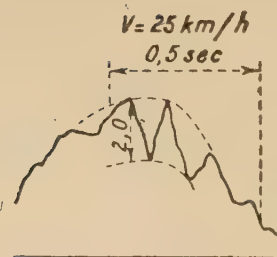


Fig. 24.

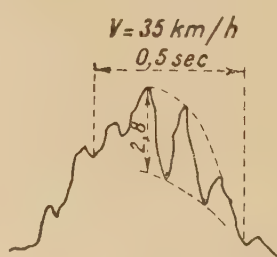


Fig. 25.

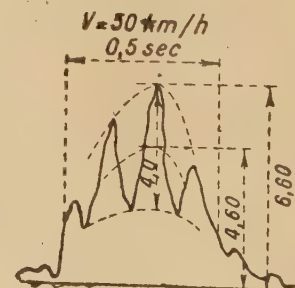


Fig. 26.

On observe nettement l'accroissement de l'amplitude avec la vitesse et le graphique des résultats (fig. 27) montre le caractère linéaire de cet accroissement en fonction de v , à l'exception du passage à 20 km/h qui échappe seul à la règle. Nous avons tracé en pointillé sur ce graphique la droite

$$(192) \quad \alpha = \frac{4\pi f_1 v}{l} \sqrt{\frac{f_1 + 0,8f_0}{g}} = 0,137v$$

qui coïncide remarquablement avec ces résultats, comme nous l'avons

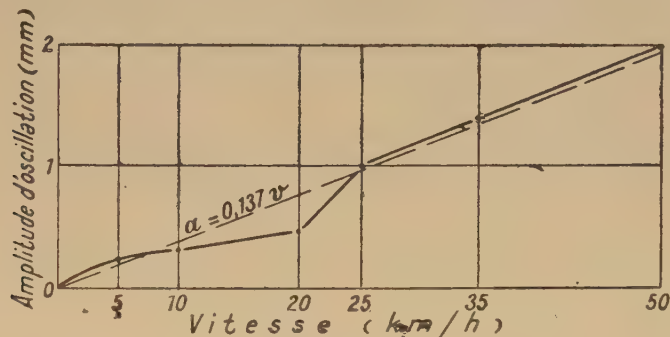


Fig. 27.

dit au début de cette étude, et qui correspond à une mise en charge par sauts brusques proportionnels à la période d'oscillation

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_1 + 0,8f_0}{g}} = 0,14 \text{ sec},$$

bien conforme à l'expérience.

Nous avons pu donner, dans divers paragraphes, des justifications théoriques de la formule (192) au coefficient près qui dépend, en fait, de circonstances fortuites et qui se situe d'ordinaire entre π et 2π . Les oscillations du pont de Douai sont exceptionnelles.

Mais le fait important est la forme linéaire en v et sa liaison avec la portée l du pont. Nous avons déduit des paragraphes I,6 et II,10 la formule pratique

$$(193) \quad \frac{a}{f} = \frac{(0,03 \text{ à } 0,06) v}{\sqrt{l}}$$

pour le rapport habituel

$$\frac{f}{l} = 10^{-3}.$$

La tableau ci-dessous donne quelques résultats d'expériences comparées à la formule (193) avec les deux coefficients 0,03 et 0,06. Devant

la grande complexité des mouvements enregistrés, on ne pouvait espérer une concordance bien marquée. Le coefficient 0,06 paraît bien convenir aux cas de Bobigny et de Vecquemont. Il est trop fort pour les autres, mais doit être conservé par mesure de sécurité, car on a enregistré aussi $k = 0,2$ à 30 km/h sur un pont de 23 m de portée.

Nous concluons donc que, en outre de l'effet centrifuge dont nous avons rappelé le rôle, l'effet oscillatoire doit être pris en compte dans le calcul des ponts au moyen d'une formule du type (193). L'effet d'impact doit être, quand il peut avoir lieu, calculé à part au moyen de la formule de SAINT-VENANT ou bien de celle donnée au paragraphe I,9.

Enfin, à l'appui des conclusions du paragraphe III,1 nous donnons également des graphiques enregistrés sur un pont métallique très flexible (fig. 28 à 30) et sur un pont en béton armé (fig. 31). On y voit net-



Fig. 28. — Vitesse 32 km/h.



Fig. 29. — Vitesse 40 km/h.

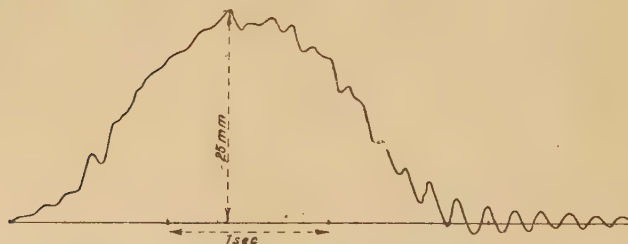


Fig. 30. — Vitesse 47 km/h.

Fig. 28 à 30. — Oscillations du pont de la rue d'Avron à Paris.

tement le caractère libre de l'oscillation du pont métallique et le caractère très amorti de l'oscillation du pont en béton armé dont la pseudo-période atteint d'ailleurs 3,5 fois la période propre. Au surplus, on remarque une flèche rémanente du pont en béton, caractéristique d'une prise insuffisante qui était pourtant de 90 jours. Ceci montre tout l'intérêt qu'on peut tirer de l'étude des mouvements oscillatoires dans les ponts et la nécessité de revoir, en fonction de ce qui précède, les données réglementaires relatives au calcul des ponts.

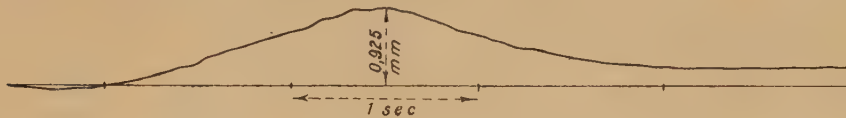


Fig. 31. — Oscillations du pont du boulevard Ney à Paris (vitesse 50 km/h.).

OUVRAGE.	VITESSE		MAJORA- TIONS OBSERVÉES $k = \frac{a}{f}$	PRÉVISIONS THÉO- RIQUES.	
	EN KM/H.	EN M/S.		$0,03 \frac{v}{\sqrt{l}}$	$0,06 \frac{v}{\sqrt{l}}$
Pont de Bobigny sur le canal de l'Ourcq ($l = 30$ m)	6	1,70	0,015	0,009	0,018
	20	5,60	0,050	0,030	0,060
	30	8,40	0,100	0,045	0,090
Pont de Vecquemont (1916)	15	4,20	0,032	0,023	0,045
	20	5,60	0,055	0,030	0,060
Pont de Lamotte- Brebrière (1940). ($l = 32$ m)	20	5,60	0,040	0,030	0,060
	60	16,70	0,050	0,090	0,180
	80	22,30	0,095	0,120	0,240
	95	26,50	0,100	0,140	0,280
Pont d'Isbergues ($l = 32$ m)	20	5,60	0,075	0,030	0,060
	80	22,30	0,170	0,120	0,240

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I. — Poutres courtes.	
I,1. Problème de Stokes	6
I,2. Effet centrifuge	8
I,3. Oscillations	13
I,4. Charges multiples. Couplage	20
I,5. Influence du poids de la poutre	25
I,6. Effet de mise en charge. Coefficient dynamique d'oscillation	28
I,7. Coefficient dynamique total	34
I,8. Influence de l'encastrement	35
I,9. Effet d'impact	36
CHAPITRE II. — Grandes poutres.	
II,1. Généralités	40
II,2. Problème de Bresse	41
II,3. Effet centrifuge	42
II,4. Influence de la contre-courbure	45
II,5. Oscillations	46
II,6. Problème de Renaudot	48
II,7. Effets centrifuge et de progression	50
II,8. Oscillations	52
II,9. Flèche pendulaire	56
II,10. Coefficients dynamiques	58
CHAPITRE III. — Amortissement. Résonance.	
III,1. Amortissement	63
III,2. Résonance	71
CHAPITRE IV. — Appareils de mesures. Essais.	
IV,1. Les fleximètres	77
IV,2. Les tensomètres	80
IV,3. Essais	82

DEUXIÈME THÈSE.

Propositions données par la Faculté :

ESSAI D'INTERPRÉTATION VECTORIELLE DES PHÉNOMÈNES ÉLASTIQUES

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 6 janvier 1950.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

A. CHATELET.

VU

ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH.

